Digitized by Google

NAZIONALE
B. Prov.
IV
109
VITT. EM. III
NAPOLI

B 38

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d'ordine 36

120 b 19

109
6
AH

B: Prov.
IV
109

Digitized by Google

613299

Diophantus

von Alexandria

arithmetiſche Aufgaben

nebſt deſſen Schrift

über die

Polygon-Zahlen.

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

Aus dem Griechiſchen überſetzt und mit Anmerkungen begleitet

von

Otto Schulz,

Profeſſor am Berliniſch-Cölniſchen Gymnaſium zum grauen Kloſter.

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

Berlin, 1822.

In der Schleſingerſchen Buch- und Muſikhandlung.

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

Vorbericht.

Das Werk des Diophantus, welches ich zunächſt den Freunden der Mathematik in einer deutſchen Bearbeitung übergebe, gehört unſtreitig zu den ſchätzbarſten Ueberreſten des griechiſchen Alterthums. Schon als ein Denkmal von dem Zuſtande der Wiſſenſchaften unter den Griechen müßte es für den Alterthumsforſcher einen geſchichtlichen Werth haben; aber ſelbſt von der wiſſenſchaftlichen Seite betrachtet, verſpricht es dem Mathematiker eine reiche Ausbeute von ſinnreichen Methoden zur Auflöſung eben ſo ſinnreicher Aufgaben aus der unbeſtimmten Analytik. Es müßte daher befremden, daß ein Werk von ſolcher Bedeutung in

neuerer Zeit ſo wenig beachtet worden iſt, wenn nicht die Seltenheit des griechiſchen Textes, die ziemlich allgemeine Abneigung, ich weiß nicht, ob der Philologen gegen mathematiſche Studien, oder der Mathematiker gegen philologiſche, und endlich der bloß kaufmänniſche Sinn der mehreſten Buchhändler die auffallende Erſcheinung vollſtändig erklärten. Der Verfaſſer, der ſeit einer Reihe von Jahren ſich mit dem Studium der griechiſchen Mathematiker beſchäftigt hat, und gern das Seinige dazu beitragen möchte, die wiſſenſchaftlichen Schätze des griechiſchen Alterthums wieder ans Licht zu ziehen, und auch für den Nichtkenner der griechiſchen Sprache zugänglich zu machen, glaubt daher keine undankbare Wahl getroffen zu haben, indem er von der eben vollendeten Bearbeitung des Apollonius über die Kegelſchnitte, zu welcher ſich für jetzt kein Verleger fand, zu der Bearbeitung eines Werkes überging, das nicht bloß durch eine höchſt ſinnreiche Methode, ſondern eben ſo ſehr durch ſeinen Inhalt, den mathematiſchen Leſer anzuziehen geeignet iſt.

Ueber die Lebensumſtände des Diophantus wiſſen wir ſo wenig, daß wir nicht ein Mal ſein Zeitalter mit völliger Sicherheit angeben können, ſondern uns begnügen müſſen mit der Feſtſtellung zweier ſehr weiten Gränzen, innerhalb deren ſein Leben und Wirken fallen muß. Diophantus erwähnt in ſeiner Schrift über die Polygonzahlen (§. VIII. S. 329 dieſer Ueberſetzung) einer von Hypſikles aufgeſtellten Erklärung dieſer Zahlen; nun iſt aber kein anderer Mathematiker dieſes Namens bekannt, als der Verfaſſer der kleinen Schrift über die regelmäßigen Körper, welche man, wegen der Aehnlichkeit des Inhalts, den Elementen des Euklides als ein vierzehntes und funfzehntes Buch einverleibt hat. In der Vorrede zu dieſer Schrift erwähnt Hypſikles einer Schrift des Apollonius über das Verhältniß eines in dieſelbe Kugel beſchriebenen Dodekaeders und Ikoſaeders, zu deren Ergänzung und Berichtigung eben ſeine Arbeit beſtimmt ſei. Von der Schrift des Apollonius, und einer ſpäteren berichtigten Ausgabe derſelben ſagt Hypſikles, ſie ſei überall zu haben,

und man darf daher nicht zweifeln, daß Hypſikles bedeutend jünger als Apollonius ſei. Da der letztere nach dem Zeugniß ſeines Erklärers Eutocius unter dem Ptolemäus Evergetes, alſo etwa 200 Jahre vor Chriſti Geburt gelebt hat, ſo hat man allen Grund, den jüngeren Diophantus in eine viel ſpätere Zeit zu ſetzen.

Die zweite Gränze für das Zeitalter des Diophantus will man durch das Leben einer vermeintlichen Erklärerinn ſeiner Werke feſtſtellen. Hypatia, die eben ſo gelehrte als unglückliche Tochter des Theon von Alexandria hat nach dem Zeugniß des Suidas einen Commentar zu einem Werke des Diophantus geſchrieben. Die Unglückliche endigte nach der übereinſtimmenden Erzählung mehrer kirchlichen Schriftſteller, unter anderen auch des Sokrates (Hist. Eccles. L. V. cap. 15.) in einem von feindſeligen Prieſtern erregten Aufſtande, unter dem zehnten Conſulat des Honorius und dem ſiebenten des Theodoſius, d. i. im Jahre 415 der chriſtlichen Zeitrechnung, ſo daß Diophantus in dem Zeitraum

zwiſchen 200 vor Chriſto bis 400 nach Chriſto gelebt haben muß.

Ich darf es aber nicht übergehen, daß bei der letzteren Nachricht höchſt wahrſcheinlich eine Verwechſelung zweier gleichnamigen Perſonen obwaltet. Nach der wahrſcheinlichen Lesart beim Suidas *) hat Hypatia nicht einen Com-

*) Suidas hat einen eigenen Artikel über das Leben der Hypatia. Es heißt darin: Ὑπατία ἡ Θέωνος τοῦ Γεωμέτρου θυγάτηρ, τοῦ Ἀλεξανδρέως φιλοσόφου, καὶ αὐτὴ φιλόσοφος, καὶ πολλοῖς γνώριμος. γυνὴ Ἰσιδώρου, τοῦ φιλοσόφου. ἤκμασεν ἐπὶ τῆς βασιλείας Ἀρκαδίου. ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διοφάντην, τὸν ἀστρονομικόν. Κανόνα εἰς τὰ κωνικά. Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. Daß die Interpunction dieſer Stelle unrichtig ſei, fällt in die Augen. In Ludolph Küſters Ausgabe des Suidas wird vorgeſchlagen: ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διοφάντου ἀστρονομικὸν κανόνα. εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. Iſt dieſe Interpunction richtig, ſo hat Hypatia nicht über das berühmte arithmetiſche Werk unſeres Diophantus, ſondern über die aſtronomiſchen Tafeln eines gleichnamigen Verfaſſers geſchrieben; denn wenn Suidas denſelben auch Διοφάντης nennt, nicht Διόφαντος, ſo wird doch in den Epigrammen des Lucillius ein

mentar zum Diophantus überhaupt, ſondern zu einem aſtronomiſchen Werke deſſelben. — ἐις Διοφάντου ἀςρονομικὸν κανόνα — geſchrieben, und es iſt ſehr die Frage, ob jener Aſtronom mit unſerem Arithmetiker dieſelbe Perſon ſei. Wenigſtens iſt der Name Diophantus kein ganz ſeltener, wie ſchon Fabricius in ſeiner Bibliotheca Graeca (Vol. V. S. 641. Edit. Harles.) durch die Aufzählung mehrer Diophanti beweiſ't, und nirgend findet ſich eine Spur,

Aſtrologe Diophantus erwähnt, und der Name Διοφάντης findet ſich ſonſt nirgend, wiewohl ich darum nicht behaupten möchte, daß die Form Διοφάντης ungriechiſch ſei, da es ſchon der Συκοφάντης widerlegen könnte.

Andere interpungiren indeß: ἔγραψεν ὑπόμνημα ἐις Διόφαντον. ἀςρονομικὸν κάνονα. κ. τ. λ. ſo daß unſere Hypatia außer dem Commentar über den Diophantus und Apollonius Kegelſchnitte ein eigenes Werk geſchrieben haben müßte, welches ihr auch mehre Litteratoren, unter anderen Heilbronner Hist. Matheseos universae p. 376. und Montucla Hist. des Mathématiques Tom. I. p. 326. wirklich beilegen.

daß das Alterthum in unſerem Diophantus einen großen Aſtronomen geſehen habe; als Arithmetiker dagegen ſtand er den Alten ſo hoch, daß Johannes von Jeruſalem in dem Leben des Johannes von Damaskus ſagen konnte, er ſei in der Geometrie ſo bewandert geweſen wie Euklides, in der Arithmetik wie Pythago- und — Diophantus!

Alle dieſe Umſtände überſehend, und nur froh, irgend ein gleichzeitiges testimonium de Diophanto aufzutreiben, hat man kein Bedenken getragen, einige in Brunck's Analectis Veterum Poetarum P. II., 517. sqq. enthaltene Epigramme eines Lucillius, der zur Zeit des Nero gelebt haben ſoll, auf unſeren Diophantus zu beziehen, und da Lucillius von ſeinem Diophantus wie von einem Zeitgenoſſen redet, ihn unter die Regierung des Nero zu ſetzen. Aber man vergißt, daß Lucillius ſeinen Diophantus ausdrücklich Diophantus den Aſtrologen, nicht Diophantus den Arithmetiker nennt, und daß ihm die winzige Geſtalt und der aſtrologiſche Aberglaube des guten Mannes gerade ſo zur Zielſcheibe ſeines Witzes

dienen muß, wie einem neueren Epigrammatiker Wahls lange Naſe. Man höre nur, wie der Spötter Lucillius dem armen Aſtrologen und nebenbei ſeinem Arzte Hermogenes mitſpielt:

I.

Aus Atomen beſtehe die Welt, ſo lehrt' Epikurus,
Kleineres meinte er wohl, gäb' es o Alkimos nicht.
Aus Diophanten hätt' er geſagt, dafern Diophantus
Mit ihm lebte, der viel kleiner iſt, als ein Atom.
Oder auch ſo: aus Atomen beſteht das übrige Weltall,
Aus Diophanten beſteht wiederum jedes Atom.

II.

Als Diophantus der Winzige ſich zu erhängen beſchloſſen,
Nahm er ein Spinnegeweb', ſchnürte die Kehle ſich zu.

III.

Als Diophantus den Arzt Hermogenes neulich im Traum ſah,
Schützt' ihn kein Amulet, ſchlafend empfing er den Tod!

IV.

Zu Hermogenes ſprach dem Arzt Diophantus der Sternwart,
Nur neun Monden noch ſei er zu leben beſtimmt.
Lachend erwiederte der: was doch neun Monden beſagen,
Grüble du aus, ich ſelbſt gebe dir kurzen Beſcheid.
Sprach's und berührt' ihn bloß mit der Hand, und ſetzt — Diophantus,
Während er Andere ſchreckt, zappelte ſelber ſich todt.

Schwerlich können die Späße über das ſeltſame Ende dieſes lächerlichkleinen und abergläubiſchen Diophantus, denen doch wohl irgend eine Thatſache zum Grunde liegen muß, auf unſeren Diophantus bezogen werden; denn unter den arithmetiſchen Räthſeln in der grie-

chiſchen Anthologie, welche man gröſstentheils dem Metrodorus beilegt, und von denen der Anhang zum fünften Buche einige nachzubilden verſucht, befindet ſich ein Epigramm, das letzte in dem erwähnten Anhang, das ohne allen Zweifel auf unſeren Diophantus geht, indem es ihn als einen großen Arithmetiker bezeichnet, und welches das Alter deſſelben, nebſt einigen Umſtänden ſeines Lebens in einem algebraiſchen Räthſel angiebt. Nach dieſem unzweideutigen und wahren testimonio de Diophanto hat derſelbe das hohe Alter von 84 Jahren erreicht, und iſt alſo vermuthlich doch eines natürlichen Todes geſtorben; man kann daher ſchwerlich geneigt ſein, den Aſtrologen Diophantus, der ſich bald an dem Faden eines Spinnegewebes aufhängt, bald aus einer abentheuerlichen Furcht vor dem Arzte Hermogenes eines unfreiwilligen Todes ſtirbt, mit dem Diophantus für eine Perſon zu halten, der um ſeiner mathematiſchen Kenntniſſe willen in dem ganzen Alterthum ſo hoch geſchätzt wurde, und nach einem unverdächtigen Zeugniß ein ſo hohes Alter erreicht hat.

Unter dieſen Umſtänden wäre es doppelt angenehm, wenn ſich aus ſeinen Schriften irgend eine Angabe entnehmen ließe, aus der man ſein Zeitalter beſtimmen könnte; aber eine ſolche Angabe findet ſich nicht, denn der Dionyſius, welchem er ſeine Schrift zugeeignet hat, iſt, wiewohl ihn Diophantus τιμιώτατε anredet, dem berühmten Namen zum Trotz, dennoch eine völlig unbekannte Perſon. Bombelli's Annahme, Diophantus habe unter dem Kaiſer Antoninus Pius gelebt, iſt eine bloße Vermuthung, die nichts weiter für ſich hat, als daß ſie den übrigen Umſtänden nicht geradezu widerſpricht, und am erſten möchte man ſich daher bei der Angabe des Abulpharagius beruhigen, der ihn (Historia Dynast. S. 141. des arabiſchen Textes. S. 89. der lateiniſchen Ueberſetzung von Eduard Pococke. Oxford 1663.) zu einem Zeitgenoſſen des Kaiſers Julianus Apoſtata macht.

Nachdem Abulpharagius nämlich mehre zur Zeit des Julianus lebende Philoſophen angeführt hat, fährt er nach Pococke's Ueberſetzung

a. a. O. fort: ex iis etiam *Diophantes* (sic), cujus liber A, B, *) quem Algebram vocat, celebris est, in quem si immiserit se lector, Oceanum hoc in genere reperiet. Man darf hierbei allerdings die Frage aufwerfen, welche Gewähr der ziemlich ſpäte Armenier — er lebte in der Mitte des dreizehnten Jahrhunderts — für ſeine Angabe gehabt habe, und Colebrooke äußert ſogar die Vermuthung, ſie gründe ſich vielleicht bloß auf eine Stelle im Suidas, der einen nicht näher bezeichneten Diophantus als Lehrer des Rhetor Libanius, eines Zeitgenoſſen des Kaiſer Julianus Apo-

*) Im Arabiſchen ſteht: ſein Buch Ab-kismet über Al-Dschebr und Al-Mokabala iſt berühmt. Al-Dschebr und Al-Mokabala d. i. Zuſammenſetzung und Vergleichung iſt bei den Arabern die gewöhnliche Benennung der Algebra. Kismet heißt Theilung, aber Ab-kismet giebt keinen Sinn, ſo wenig wie A, B, was Pococke dafür geſetzt hat. Vermuthlich ſoll es den Titel des Werkes anzeigen, und iſt am Ende gar eine Verſtümmelung des griechiſchen Wortes Arithmetik. Ich verdanke dieſe Bemerkungen der Güte des Herrn Profeſſor Ideler.

ſtata anführe. Es iſt aber nicht abzuſehen, warum Suidas gerade der einzige Gewährsmann unſeres Geſchichtſchreibers ſein ſoll, da er S. 222. der angeführten Ueberſetzung eines von Mohammed Al Buzjani abgefaßten Commentars über den Diophantus erwähnt, und alſo höchſt wahrſcheinlich aus anderen Quellen geſchöpft hat. In jedem Falle aber wird Abulpharagius Angabe durch Suidas Zeugniß noch bekräftigt, denn gerade der Umſtand, daß Suidas jenen Diophantus nicht näher bezeichnet, ſcheint laut dafür zu ſprechen, daß der berühmte Mathematiker dieſes Namens gemeint ſei, man müßte denn aus dem wohl bekannten: Mathematicis non licet esse disertis den Schluß ziehen, ein Redner könne unmöglich Schüler eines Mathematikers geweſen ſein, ein Schluß, gegen welchen ſich im Ernſte freilich nichts einwenden läßt.

So wie über dem Leben des Diophantus, ſo ſchwebt auch über dem Schickſal ſeiner Werke noch manches Dunkel, das vielleicht niemals aufgehellt werden wird. Sein großes arithmetiſches Werk beſtand, wie er am

Schluß der Einleitung ſagt, aus dreizehn Büchern, aber nur ſechs derſelben ſind in den fünf bekannten Handſchriften vorhanden, wenn man nicht etwa die kleine, noch dazu nicht vollſtändige Schrift über die Polygonzahlen als ein ſiebentes anſehen will, eine Annahme, für welche zwar die Aehnlichkeit des Inhalts ſpricht, welche aber die ganz verſchiedenartige Behandlung des Stoffes gegen ſich hat. Auch die ſechs Bücher, welche wir gegenwärtig beſitzen, haben ſchwerlich ihre urſprüngliche Geſtalt behalten. Die Auflöſung vermiſchter quadratiſcher Gleichungen, welche Diophantus zu geben verſpricht, findet ſich nirgend, und wird doch bei den Aufgaben der drei letzten Bücher ſchon als bekannt vorausgeſetzt, und Aufgaben, welche ihrem Inhalte nach in ein früheres Buch gehörten, kommen zuweilen noch in einem ſpäteren Buche vor, oder werden, wie die erſten Aufgaben des zweiten Buches, mit ganz unweſentlichen Veränderungen zwei Mal vorgetragen. Oft hat man daher vermuthet, unſer Diophantus ſei ein von einem flüchtigen Arbeiter, einem ſogenannten Dilettanten, angefer-

gefertigten Auszug aus einem größeren Werke; allein für einen ſolchen Auszug iſt immer noch zu viel Plan in der Folge und Anordnung der Sätze, und was im Einzelnen auffällt, läßt ſich ſehr wohl daraus erklären, daß der Abſchreiber mehre Codices vor ſich hatte, von denen der eine oder der andere eine ſpätere Ueberarbeitung, vielleicht ſogar von der Hand des urſprünglichen Verfaſſers war. Spätere, berichtigte Ausgaben deſſelben Werkes waren auch bei den Alten nichts Seltenes, und wenn ſich das nicht ſchon durch die Natur der Sache rechtfertigte, ſo könnte man das ausdrückliche Zeugniß des *Apollonius* anführen, der von dem vorhin angeführten kleineren, ſo wie von ſeinem berühmten Werk über die Kegelſchnitte, eine neue und verbeſſerte Ausgabe veranſtaltete, und dadurch ſelbſt veranlaßte, daß ſich von demſelben Satze oft zwei ganz unähnliche Beweiſe vorfinden.

Der Umſtand, daß eine der drei vaticaniſchen Handſchriften den Inhalt der erſten ſechs Bücher in deren ſieben vertheilt, hat übrigens auch die entgegengeſetzte Vermuthung

veranlaßt, daß wir in unſeren ſechs Büchern vielleicht einen weit größeren Theil des Ganzen beſitzen mögen, als es den Anſchein hat; aber dieſe Annahme, für welche ſich ſonſt noch Manches anführen ließe, ſtimmt weder mit dem Zeugniß des Regiomontanus, der eine Handſchrift von allen dreizehn Büchern geſehen zu haben verſichert, noch mit Bachets beſtimmter Angabe, der Cardinal Perron habe eine Handſchrift von allen dreizehn Büchern beſeſſen, und ſie ſeinem Landsmanne Wilhelm Goſſelin, der einen Commentar zum Diophantus ſchreiben wollte, überlaſſen, Goſſelin aber ſei an der Peſt geſtorben, und alle Nachfrage nach der Handſchrift, die der Cardinal für jeden Preis wieder einlöſen wollte, vergeblich geblieben. Wären Regiomontanus und Bachets Angaben richtig, ſo dürfte man noch nicht die Hoffnung aufgeben, irgendwo in Italien oder Frankreich eine vollſtändige Handſchrift des Diophantus aufzutreiben, was ein um ſo willkommnerer Fund ſein würde, da die bekannten Handſchriften in allen ihren Fehlern ſo genau übereinſtimmen, daß ſie als Abſchriften deſſelben

Codex im Grunde nur für einen einzigen zu rechnen ſind.

Diejenigen, welche in unſeren ſechs Büchern gern einen vollſtändigen oder doch beinahe vollſtändigen Diophantus haben möchten, legen ein großes Gewicht darauf, daß Diophantus mit dem ſechſten Buch ſich an die algebraiſche Behandlung geometriſcher Aufgaben macht, ſo daß man den eigentlich arithmetiſchen Theil des Werkes mit dem fünften Buch als abgeſchloſſen anſehen muß. Vielleicht aber fehlen gerade von dem letzten halb geometriſchen Theile des Werkes mehre Bücher; gewiß aber iſt zwiſchen dem erſten und zweiten Buche, von welchem nur die erſten Aufgaben zu trennen ſind, eine bedeutende Lücke. Das erſte Buch enthält faſt durchgängig beſtimmte Aufgaben des erſten Grades, und zuletzt einige Aufgaben, welche auf eine reine quadratiſche Gleichung führen. Ohne Zweifel folgte hierauf die in der Einleitung verſprochene Auflöſung der vermiſchten Gleichungen des zweiten Grades, nebſt Aufgaben, welche als Beiſpiele gelten konnten, ſo daß die fünf Bücher, welche

ſich mit der unbeſtimmten Analytik beſchäftigen, als ein viel ſpäter folgender Theil des Ganzen anzuſehen ſind.

Auch das darf ich hier nicht unberührt laſſen, daß Diophantus an verſchiedenen Stellen, z. B. bei der dritten und vierten Aufgabe des fünften Buches, gewiſſe arithmetiſche Sätze unter dem Namen Porismen *) anführt, und

*) Montucla (Hist. des Mathématiques Tom. I. S. 318) erwähnt, daß Theon in ſeinem Commentar zum fünften Buche des Almageſt noch ein anderes Werk des Diophantus anführe. Théon (Comment. in Alm. L. V.) cite un autre ouvrage de cet Analiste, où il était question de la pratique de l'Arithmétique. Je soupçonnerois, que c'était là, qu'il expliquait plus au long les régles de sa nouvelle Arithmétique, sur quoi il ne s'était pas assez étendu au commencement de ses questions. Vermuthlich iſt auch hier die Rede von den Porismen, denn ich habe das Citat in der Baſeler Ausgabe des Almageſt nicht auffinden können. Wer ſeine Angaben durch Citate belegen will, ſollte die kleine Mühe nicht ſcheuen, dem Leſer durch eine genauere Angabe die große und verdrießliche Mühe des vergeblichen Suchens zu erſparen.

zwar ſo, als müſſe der Leſer dieſelben kennen. Es iſt daher nicht unwahrſcheinlich, daß dieſe Porismen eine eigene Schrift unſeres Diophantus waren, welche vorzüglich die Zuſammenſetzung der Zahlen aus gewiſſen Beſtandtheilen zu ihrem Gegenſtande hatte. Könnte man dieſe Schrift gar als einen Beſtandtheil des großen in dreizehn Büchern abgefaßten arithmetiſchen Werkes anſehen, ſo wäre es ſehr erklärbar, daß gerade dieſer Theil, der den bloßen Liebhaber weniger anzog, verloren ging. Da indeß Diophantus ausdrücklich ſagt, ſein Werk behandele *arithmetiſche Probleme*, ſo hat wenigſtens die letztere Annahme nur einen geringen Grad von Wahrſcheinlichkeit. Dagegen iſt es ſehr glaublich, daß Diophantus in den verlorenen Büchern noch ganz neue Methoden zur Auflöſung von unbeſtimmten Aufgaben entwickelt hat. In unſeren ſechs Büchern beſchränkt er ſich mehrentheils auf ſogenannte *doppelte Gleichungen*, d. h. er zeigt, wie man für die unbekannte Größe einen Werth finden ſolle, der in zwei verſchiedene Formeln geſetzt, beide zugleich zu Quadraten macht. Nun

läßt ſich aber auch die Aufgabe ſtellen, den Werth einer veränderlichen Größe x ſo zu beſtimmen, daß drei oder mehre Formeln zugleich Quadrate werden, wenn man für x einen beſtimmten Zahlenwerth ſetzt, und vermuthlich war die Auflöſung ſolcher dreifachen Gleichungen ein Hauptgegenſtand der verlorenen Bücher; denn daß ſie ſich mit Gleichungen des dritten Grades beſchäftigt haben ſollten, iſt nicht wahrſcheinlich, da Diophantus nur die allereinfachſten Fälle zu kennen ſcheint, wo man aus einer kubiſchen Gleichung einen rationalen Werth für die unbekannte Größe herleiten kann.

Der Umſtand, daß Diophantus der erſte, und man kann hinzuſetzen, der einzige Schriftſteller von Belang über die allgemeine Arithmetik iſt, hat wohl die erſte Veranlaſſung gegeben, daß man ihn für den eigentlichen Erfinder der Algebra oder doch desjenigen Theils derſelben, mit welchem ſein Werk ſich hauptſächlich beſchäftigt, der unbeſtimmten Analytik, gemacht hat, und dieſe Meinung iſt ſo allgemein geworden, daß man die unbeſtimmte Ana-

lytik oft auch *diophantiſche Analyſis*, und unbeſtimmte Aufgaben überhaupt *dio-phantiſche* nennt. Es iſt aber nichts als Mißverſtändniß eines flüchtigen Leſers, wenn man hinzuſetzt, Diophantus eigne ſich ſelbſt die Erfindung der Analyſis zu, denn in der Zueignung an ſeinen Dionyſius ſagt er nichts weiter, als daß die Auflöſung arithmetiſcher Probleme, die jener zu lernen wünſchte, und von der er alſo doch ſchon *im Allgemeinen* gehört haben mußte, ihm nur darum ſchwierig ſcheine, weil ſie ihm noch nicht bekannt ſei, daß aber des Schülers Eifer und des Lehrers Darſtellung (ἀπόδειξις) alle Schwierigkeiten leicht überwinden werde. Gerade daſſelbe, dächte ich, könnte noch jetzt ſagen, wer einem wißbegierigen Schüler eine faßliche Anweiſung zur Integralrechnung widmete, ohne daß man ihn darum beſchuldigen könnte, ſich ſelbſt die Erfindung dieſes Theiles der Analyſis angeeignet zu haben. Die ganze Art, wie Diophantus den Algorithmus allgemein bezeichneter Größe vorträgt, und die allgemeinen Regeln für die Auflöſung der Gleichungen mehr

vorausſetzt als entwickelt, zeigen deutlich genug, daß er nicht eine neue, auch unter den Gelehrten wenig bekannte Theorie vortragen wollte, ſondern daß er ſich bloß das Verdienſt einer faßlichen Darſtellung eines noch wenig bearbeiteten, und daher auch wenig bekannten Gegenſtandes beilegt.

Die Frage, ob zwiſchen der Algebra der Indier und der Griechen irgend ein näherer Zuſammenhang Statt finde, iſt in neuerer Zeit mehrmals zu Sprache gekommen. Die geſchichtlichen Gründe für oder wider dieſe Behauptung zu prüfen, liegt für jetzt wenigſtens außer meinem Bereich, und nur ſo viel darf ich ſagen, daß die Annahme, als hätten die Indier unſern Diophantus, oder dieſer indiſche Schriftſteller benutzt, für mich nicht die mindeſte innere Wahrſcheinlichkeit hat, ſeitdem ich durch Colebrooke's Ueberſetzung einiger algebraiſchen Schriften der Hindus *) dieſe nä-

*) Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrĭt of Brahmegupta and Bháscara. Translated by Henry Thomas Colebrooke. Esq. London 1817.

her habe kennen gelernt. Nirgend findet ſich eine Uebereinſtimmung in der Bezeichnung der Größen, nirgend eine Aehnlichkeit in der ganzen Behandlung des Gegenſtandes. Der Grieche bezeichnet die unbekannte Größe ſchlechthin durch ἀριθμός, und wenn in derſelben Aufgabe auch mehre unbekannte Größen vorkommen, ſo weiß er mit dem einzigen Zeichen für dieſe unbekannte Größe und deren Potenzen ſo geſchickt

Das Werk enthält außer einer Abhandlung über die Geſchichte der Algebra unter den verſchiedenen Völkern zwei Abhandlungen Lilávati und Vija-Ganita, welche eine Einleitung zu einem großen aſtronomiſchen Werke des Bháscara Achárya ausmachten; ferner zwei kleine Schriften, Ganitád'haya und Cuttacád'hyaya von Brahmegupta, welche das 12. und 18. Kapitel eines ähnlichen Lehrbuches der Aſtronomie ausmachten. Bháscara ſchrieb, nach Colebrooke's Unterſuchung, um das Jahr 1150, Brahmegupta zu Ende des ſechſten oder zu Anfang des ſiebenten Jahrhunderts der chriſtlichen Zeitrechnung, beide benutzten aber frühere Schriften. Colebrooke theilt in den Anmerkungen manche Erklärungen ſpäterer indiſcher Commentatoren mit.

umzugehen, daß er mit dem einzigen Zeichen ausreicht; der Indier nennt ſeine unbekannte Größe yávat - távat d. i. tantum quantum, ſo viel als es ſein mag, und wenn mehre unbekannte Größen in der Aufgabe vorkommen, ſo bezeichnet er ſie durch die Namen der verſchiedenen Farben, Schwarz, Gelb, Roth, Blau u. ſ. w. ſo daß Farbe und unbekannte Größe ihm gleichbedeutend iſt.

Der Grieche hat für jede Potenz ein beſonderes Zeichen, ς̀, δ̄ᵛ, u. ſ. w., der Indier bezeichnet die erſte Potenz der unbekannten Größe durch ya, die zweite durch ya v; der Grieche bezeichnet beſtimmte Zahlen durch μ̊, eine Abkürzung für μονὰς, der Indier durch ru als Abkürzung für rúpa Form, Geſtalt; der Grieche bezeichnet unſer Minus durch eine eigene Abkürzung für λεῖψις, der Indier zeigt bloß durch einen über den Coefficienten geſetzten Punkt an, wenn eine Größe negativ zu nehmen iſt, ſo daß z. B. $4x^2 - 9x - 4$ bei ihm geſchrieben wird: ya v 4 ya 9 ru 4; der Grieche giebt jede Aufgabe rein und ohne geſchmückte Einkleidung in Fabel und Geſchichte, und richtet

ſeine ganze Aufmerkſamkeit auf die Entwickelung eines zweckmäßigen Anſatzes, den er, wo der Verfolg ihn als unzweckmäßig darſtellt, durch ſinnreiche Sonderung des Allgemeinen von dem Beſondern zu berichtigen weiß, über die allgemeinen Regeln geht er dabei leicht weg, und überläßt es dem Leſer, aus dem einzelnen Falle ſich die allgemeine Methode zu entwickeln; der Indier dagegen faßt alles in ſcharf beſtimmte Regeln, und bringt ſie, dem Gedächtniß zu einer Hülfe, in Fußlange versus memoriales, und erläutert dann die Regel durch wenige Beiſpiele, denen eine witzige, oft ſpielende Einkleidung nicht fehlen darf. Kurz das Werk des Griechen iſt eine Anleitung, den Gegenſtand ſelbſt zu durchdenken, die Schriften der Indier dagegen ſind ganz darauf eingerichtet, den Schüler zum fertigen Rechnen und zur mechaniſchen Anwendung einer oft nirgend bewieſenen Regel abzurichten, und wenn es nicht zu läugnen iſt, daß die Indier in Hinſicht auf die allgemeinen Methoden der unbeſtimmten Analytik weiter gekommen ſind, als Diophantus, ſo wird doch das Werk des Griechen in

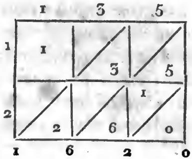
Hinſicht auf die eigenthümliche und lehrreiche Darſtellung immer einen ganz entſchiedenen Vorzug behaupten.

Nach dieſer Vergleichung des indiſchen Werkes mit dem griechiſchen wird man auf die zufällige Aehnlichkeit einzelner Aufgaben kein großes Gewicht legen, und es überhaupt wohl nicht unwahrſcheinlich finden, daß man unter dem griechiſchen, wie unter dem indiſchen Himmel, ſich mit Speculationen beſchäftigte, die ohne unmittelbare Anwendbarkeit πρὸς τὰ ἄλφιτα, des freien und denkenden Menſchen nur deſto würdiger ſind, und daß man hier wie dort auf verſchiedenen Wegen daſſelbe fand. Verſchweigen darf ich aber nicht, worauf manche ein großes Gewicht legen möchten, daß Bombelli, ein gründlicher Mathematiker, aber gewiß ein ſehr flüchtiger Leſer des Geſchichtlichen, geradezu behauptet, Diophantus führe zuweilen indiſche Schriftſteller an. In dem ganzen Diophantus findet ſich aber von ſolchen Anführungen nicht eine Spur, und wenn Bombelli nicht etwa, einem bloßen Vorurtheil zur Liebe, was er nirgend geleſen hatte, geleſen zu

haben behauptet hat, ſo kann ihn nur eine Stelle in den Scholien zum IX. Abſatz der Einleitung getäuſcht haben, wo es nach Xylanders Ueberſetzung heißt: Ut ostendatur, quo pacto penuria (i. e. λεῖψις) in penuriam ducta, copiam (i. e. ὕπαρξιν); in copiam ducta, penuriam procreet, non *Indicam* hic multiplicandi rationem, quae inversum *Graecanici* moris ordinem sequitur, sed nostram tenebimus. In wiefern die indiſche Art zu multipliciren der griechiſchen entgegengeſetzt ſei, ergiebt ſich aus dem Verfolg. Der Scholiaſt will das Quadrat von $5-x$ machen, und ſagt, er wolle erſt $+5$ mit $+5$, dann $-x$ mit $+5$, hierauf $+5$ mit $-x$ und endlich $-x$ mit $-x$ multipliciren, d. h. er will zuerſt das höchſte Stück des Multiplicandus durch das höchſte Stück des Multiplicators multipliciren, und in der Ordnung von dem Höhern zum Niedrigern fortſchreiten; iſt alſo die indiſche Art zu multipliciren der griechiſchen entgegengeſetzt, ſo iſt ſie einerlei mit der noch jetzt gewöhnlichen Art zu multipliciren, wo man mit den niedrigſten Stücken beider Factoren den An-

fang macht. Daß es ſich bei den Indiern wirklich ſo verhalte, ſehen wir auch aus dem zweiten Kapitel der Lilavati (Seite 6 und 7 bei Colebrooke), nur daß die Indier nicht immer dieſelbe Ordnung beobachteten, und die Partial-Producte bald in dieſer, bald in einer anderen Ordnung berechneten. In den Anmerkungen zur Lilavati werden verſchiedene Methoden gezeigt, die Multiplication von 135.12 zu bewerkſtelligen, die ich hier ohne weitere Erläuterung mittheile, da ſie von ſelbſt ſich erklären, wenn man nur daran denkt, daß in IV. der Factor 12 in 8.4, in V. aber in die Differenz 20—8 zerſtückelt iſt.

I.



II. 12 12 12
1 3 5
12 60
36
1620

III. 135 135
1 2
270
135
1620

IV. 135 8 1080
135 4 540
1620

V. 135 20 2700
135 8 1080
1620

Unter den Bearbeitern des Diophantus ſtellt man gewöhnlich die vorhin erwähnte Hypatia voran, ich habe aber ſchon gezeigt, wie mißlich es um dieſe ganze Annahme ſteht. Zu den beiden erſten Büchern hat der bekannte Sammler der griechiſchen Anthologie, der Mönch Maximus Planudes Scholien geſchrieben, welche Xylander in einer lateiniſchen Ueberſetzung mittheilt, denn daß die Scholien, welche Xylander

bei ſeinem Codex fand, wirklich die Planudiſchen, nicht etwa ein Bruchſtück von dem Commentar der Hypatia ſind, das wird ſchon durch den Umſtand beſtätigt, daß in eben jenem Codex ſich mehre Aufſätze über Logiſtik befanden, welche die Ueberſchrift dem Maximus Planudes zueignet. Daß die Scholien von geringem Werthe ſind, hat Xylander ſelber angemerkt, und eben das iſt ihm ein Beweis, daß ſie nicht ein Werk der klugen Hypatia ſein können; dennoch enthalten ſie im Einzelnen manche gute Bemerkung, die den ſpätern Auslegern entgangen war, nur daß Xylanders Ueberſetzung oft eine Rücküberſetzung ins Griechiſche nothwendig macht. Dem größeren Theile nach enthalten die Scholien aber wirklich nichts, als bloße Umſchreibungen des Textes, oder geometriſche Beweiſe für arithmetiſche Sätze, die man viel leichter durch Rechnung mit allgemein bezeichneten Größen beweiſ't. Von dem Commentar, welchen, nach Abulpharagius Angabe, Mohammed Al Buzjani über den Diophantus geſchrieben hat, iſt ſchon vorher beiläufig die Rede geweſen; ob derſelbe, wie ſo viele andere Werke

der

der Araber verloren gegangen ſei, oder noch irgendwo, wie ein todter Schatz, vergraben liege, iſt für jetzt wohl ſchwerlich zu entſcheiden.

Unter den Neueren hat ſich zuerſt der vorhin erwähnte Wilhelm Xylander oder Holzmann von Augsburg, Profeſſor der ariſtoteliſchen Philoſophie auf der hohen Schule zu Heidelberg um den Diophantus verdient gemacht. Er machte, wie er ſelbſt erzählt, im Jahre 1571 eine Reiſe nach Wittenberg, wo er viel mit zweien zu ihrer Zeit berühmten Mathematikern, D. Sebaſtian Theodorich, und M. Wolfgang Schuler verkehrte. Unter andern gaben ſie ihm einige Seiten eines griechiſchen Diophantus zu leſen, und nannten ihm auch den Eigenthümer des Codex, *Andreas Dudicius* Sbardellatus, hoc tempore Imperatoris Romanorum apud Polonos Orator. Vor ſeiner Abreiſe ſchrieb ſich Xylander eine Aufgabe des Diophantus ab, ſich auf der Reiſe damit zu unterhalten; er zeigte die Auflöſung derſelben dem berühmten Arzte *Simon Simonius* von Lucca, der damals auf der hohen Schule zu Leipzig lehrte, und beide ſchrieben

an Dudicius, der den Codex ſogleich überſandte, und Xylander zur Ausarbeitung einer lateiniſchen Ueberſetzung dringend aufforderte. Dieſe Ueberſetzung erſchien im Jahre 1575 unter dem Titel: *Diophanti* Alexandrini Rerum arithmeticarum libri sex, quorum primi duo adjecta habent Scholia Maximi (ut conjectura est) Planudis. Item liber de numeris polygonis seu multiangulis. Opus incomparabile, verae Arithmeticae Logisticae perfectionem continens, paucis adhuc visum. A Guil. *Xylandro* Augustano incredibili labore latine redditum et Commentariis explanatum, inque lucem editum ad Illustriss. Principem *Ludovicum* Vuirtembergensem. *Basileae* per Eusebium Episcopium et Nicolai Fr. haeredes. 1575. fol. 152. Wie unvollkommen Xylanders Arbeit auch ausfiel, wie oft er auch den rechten Sinn verfehlte, und wie oft auch ſeine Anmerkungen den Leſer, der ſich Rathes erholen will, im Stiche laſſen, ſo gut war doch die Aufnahme, welche ſein Buch bei den Gelehrten damaliger Zeit fand; denn in der That ging den Ma-

thematikern durch die Erſcheinung dieſes Werkes ein neues Licht auf, und es iſt mir ſehr wahrſcheinlich, daß er viel dazu beigetragen hat, die allgemeine Arithmetik zu ihrer nachmaligen Höhe zu erheben. Auch der Fürſt Ludwig zu Wirtemberg belohnte Xylanders Bemühung auf eine wahrhaft fürſtliche Weiſe, denn wenn Heilbronner nicht ein bedeutendes aus ſeiner Taſche zugelegt hat, ſo ſchenkte er dem Verfaſſer für ſeine Ueberſetzung die baare Summe von 500 Rthlrn, und rechtfertigte ſo die Bemerkung, mit der Xylander, einen Vers des Virgilius parodirend, ſeine Zueignung anfängt:

Offerimus numeros; numeri sunt Principe digni.

Beinahe 50 Jahre ſpäter erſchien die erſte griechiſche Ausgabe von Claudius Caſpar Bachet, Herrn von Meziriac, u. ſ. w. der, aufgemuntert durch das Beiſpiel ſeines Freundes und Verwandten Antonius Faber, ſeinem eigentlichen Fache, der Rechtsgelehrſamkeit, untreu ward, und ſich ganz auf das Studium der Mathematik und der alten Litteratur legte,

und um als Mitglied der franzöſiſchen Akademie deſto ungeſtörter ſeiner Neigung folgen zu dürfen, nie ein öffentliches Amt annehmen wollte. Die erſte Ausgabe des Diophantus, welche Käſtner (Geſchichte der Mathematik Theil III. S. 152) ausführlich beſchreibt, führt den Titel: *Diophanti* Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Nunc primum Graece et Latine editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati. Auctore *Claudio Gaspare Bacheto Meziriaco Sebusiano* V. Cl. Lutetiae Paris. sumptibus Sebastiani Cramoisy. 1621 fol. S. 451. und 60. Der Titel der neueren Ausgabe, welche bei meiner Ueberſetzung zum Grunde liegt, iſt: *Diophanti* Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum Commentariis C. G. *Bacheti* V. Cl. et observationibus D. P. *de Fermat* Senatoris Tolosani. Accessit Doctrinae analyticae inventum novum, collectum ex variis ejusdem de Fermat epistolis. Tolosae excudebat Bernardus Bosc. 1670. Die Herausgabe beſorgte

Samuel Fermat *), der Sohn des berühmten Parlementsrathes zu Toulouſe, und eines der ausgezeichnetſten Mathematikers ſeiner Zeit; das Werk wird in einer eignen Zuſchrift D. (omino) Joanni Baptistae *Colberto*, dem berühmten franzöſiſchen Miniſter, zugeeignet.

Bachet hat bei ſeiner Arbeit zwar Xylanders Ueberſetzung benutzt, was er aber aus eigenen Mitteln für ſeinen Autor gethan hat, wird zu jeder Zeit eine rühmliche Erwähnung verdienen. Seine Ueberſetzung ſchließt ſich genau der Urſchrift an, ohne darum, wie Xylanders, oft unverſtändlich, oft unlateiniſch zu werden, und die jeder Aufgabe beigefügten Er-

*) Jöcher nennt deſſen Bruder Johann Franciscus Fermat als Herausgeber; die Zueignung an Colbert iſt aber S. Fermat unterzeichnet, und die Abkürzung doch wohl Samuel zu leſen. Jöcher redet übrigens auch von den Randbemerkungen Fermats, wie von einem eigenen Werke: Observationes in Diophantum, von welchen der Sohn eine neue Ausgabe beſorgt habe; was offenbar auf einem bloßen Mißverſtändniß beruht.

läuterungen zeigen, wie tief er in den Geiſt des griechiſchen Mathematikers eingedrungen war. Die drei Libri Porismatum, welche er voranſchickt, geben Beweiſe für mancherlei Lehrſätze, die bei den diophantiſchen Aufgaben gebraucht werden, und waren von großer Wichtigkeit zum Verſtändniß des Diophantus zu einer Zeit, wo Beweiſe arithmetiſcher Sätze durch allgemeine Größenzeichen noch wenig bekannt waren, und auch der Anhang, der die Lehre von den Polygonzahlen weiter fortführt, iſt ein neuer Beweis ſeines glücklichen Scharfſinns. Für die kritiſche Berichtigung des Textes konnte Bachet wenig thun, da er nur einen einzigen Codex, der jetzt in Paris verwahrt wird, und die Lesarten einer vatikatiſchen Handſchrift vor ſich hatte. Glücklicherweiſe hat die Kritik bei mathematiſchen Schriften ein viel leichteres Feld zu bearbeiten, als bei Schriften anderes Inhalts, und wenn bei dieſen der Philologe ſich abmüht, aus einzelnen Vermuthungen eine Lesart verdächtig zu machen, oder eine verdächtig gemachte als ächt darzuſtellen, ſo kann bei mathematiſchen Schrif-

ten faſt mit völliger Gewißheit beſtimmt werden, was unächt, oder was ächt ſei. Wo im Grundtext zuweilen etwas fehlte, da hat es Bachet eingeſchaltet, aber durch Klammern [ ] von dem Text des Diophantus geſondert, und wo eine Stelle offenbar etwas Unrichtiges enthält, wofür ſich das Richtige nicht ſogleich von ſelbſt ergab, da hat er die verderbte Stelle durch einen Stern * bezeichnet. Wo ich bei meiner Ueberſetzung ähnliche offenbar verderbte Stellen fand, habe ich das nämliche Zeichen beibehalten, und mich in den Anmerkungen darüber näher erklärt.

Was die neuere Ausgabe vor der älteren auszeichnet, ſind vorzüglich die kurzen aber ſinnreichen Randbemerkungen Fermats, vorzüglich zu den vier letzten Büchern, welche er ſeinem Exemplar der Bachetſchen Ausgabe beigefügt hatte, und welche der Sohn bei der neuen Ausgabe des Bachetſchen Diophantus gehörigen Ortes einſchalten ließ. Da die Bemerkungen meiſt nur kurze Andeutungen enthalten, und oft eine frühere Bemerkung durch ein ſpätere berichtigt und aufgehoben wird, ſo wäre es ganz unzweckmäßig geweſen,

ſie vollſtändig mitzutheilen, vielmehr habe ich ſowohl Fermats als Bachets Bemerkungen als ein Gemeingut benutzt, ſo weit es mir rathſam ſchien. Außer dieſen Randbemerkungen enthält dieſe Ausgabe noch einen beſondern Aufſatz: Doctrinae analyticae inventum novum, collectum a R. P. *Jacobo de Billy* S. J. Sacerdote, ex variis epistolis, quas ad eum diversis temporibus misit D. P. de *Fermat* Senator Tolosanus. Das Werk behandelt vorzüglich die Auflöſung der doppelten und dreifachen Gleichungen, welche letztere Diophantus in den uns übrigen Büchern gar nicht berückſichtigt hat, auch zeigt der letzte Theil des Aufſatzes, daß Fermat über die negativen Wurzeln bereits richtigere Vorſtellungen hatten, als bis dahin unter den Mathematikern im Umlauf waren.

Was ſonſt noch in älterer Zeit für die Bearbeitung des Diophantus geſchehen iſt, beſchränkt ſich entweder auf unvollſtändige Auszüge, dergleichen ſchon mehre Schriftſteller über die Algebra z. B. Bombelli, bei Gelegenheit mitgetheilt hatten, oder auf Arbeiten, welche das

größere Publikum niemals hat kennen gelernt. In den Oeuvres mathématiques, de *Simon Stevin*, augmentées par *Albert Girard* à Leyde 1634. fol. iſt eine Ueberſetzung der vier erſten Bücher von *Stevin* ſelbſt, und der beiden letzten Bücher von *Girard* enthalten. Die Ueberſetzung iſt aber nicht nach dem griechiſchen Text, ſondern nach Xylanders lateiniſcher Ueberſetzung gemacht, und ſollte nicht ſowohl Diophantus eigenthümliche Methode, als die darin enthaltenen Sachen mittheilen. In Guilielmi *Oughtredi* Opusculis mathematicis. Oxoniae 1677. ſind nach Heilbronners Angabe gleichfalls drei Bücher des Diophantus überſetzt, ich habe dies Buch aber eben ſo wenig erhalten können, als die eben daſelbſt angeführte Schrift des vorhin erwähnten Jeſuiten Billy: Diophantus redivivus. Nach Scheibels Angabe im eilften Stück ſeiner Einleitung zur mathematiſchen Bücherkenntniß iſt der vollſtändige Titel der älteren Ausgabe: Jac. de Billy Diophantus redivivus, in quo *per rationes Euclideas* efficiuntur Problemata, quae ille rationibus *algebraicis* eno-

davit. Paris. 1660. 4; Der Titel einer neuern Ausgabe: Jac. de Billy Diophantus redivivus, sive Enodatio Problematum, Triangulum rectangulum spectantia. Lugd. 1670. 8. maj. Den Titel der erſten Ausgabe hat Scheibel ſeiner Angabe nach aus Hendrich in Pandectis Brandenburgicis pag. 576., den Titel der letzteren aus dem Catalogus Bibliopolii *Waltheri*. Dresd. pag. 52 entnommen, beide Werke alſo nicht ſelbſt geſehen. Nach den angegebenen Titeln ſcheint es aber nicht, als ob das zweite Werk eine neue Ausgabe, ſondern vielmehr eine weitere Ausführung des erſteren ſei, in jedem Falle aber iſt es nicht ſowohl als ein Commentar zu unſerem Diophantus, ſondern als ein dem Verfaſſer eigenthümliches Werk anzuſehen, und ich habe es um ſo weniger bei meiner Arbeit vermißt, da es auf die Methode des Diophantus gar keine Rückſicht zu nehmen ſcheint.

Noch erwähnen die Litteratoren, daß ſich in der Bibliothek eines Carl von Montchall eine Bearbeitung des Diophantus von dem berühmten Mathematiker Joſeph Auria

von Neapel (vermuthlich doch nur handſchriftlich) befunden habe, welche den Titel führte: *Diophanti* libri sex, cum scholiis graecis Maximi Planudae, atque liber de numeris polygonis, collati cum Vaticanis codicibus, et latine versi a *Josepho Auria;* auch führt man des Engländers Johann Pell ungedruckte Erläuterungen des Diophantus an, von welchen Voſſius mit beſonderer Hochachtung ſpreche. Was es mit dem Werke des Joſeph Auria für eine Bewandniß habe, muß man, da das Buch ſich nirgend gefunden hat, dahingeſtellt ſein laſſen, was aber Pells ungedruckten Commentar betrifft, ſo iſt das vermuthlich eine bloße Mißdeutung deſſen, was Voſſius de universae Matheseos natura cap. 10. §. 2. darüber geſagt hat. Johann Pell war nämlich, ehe er an die Ritteracademie zu Breda verſetzt wurde, Profeſſor der Mathematik zu Amſterdam, und hielt dort Vorleſung über den Diophantus, welchen auch Voſſius mit großem Vergnügen beiwohnte, und was dieſer von einem Commentar ſeines Collegen über unſeren Diophantus ſagt, ſieht

mehr einer Aufforderung zu einem ſolchen Unternehmen, als einer geſchichtlichen Nachricht von der Vollendung deſſelben ähnlich.

Die großen Entdeckungen in der Analyſis, welche gegen das Ende des ſiebzehnten Jahrhunderts gemacht wurden, lenkten die Aufmerkſamkeit immer mehr von den Werken der griechiſchen Mathematiker ab, und öffentliche Vorleſungen über die Schriften derſelben wurden ſelten und immer ſeltener, bis ſie zuletzt völlig eingingen; auch verminderte ſich, wie ſehr natürlich war, die Zahl derer, welche die von den Neueren weit überflügelten Griechen noch einiger Aufmerkſamkeit würdigten. Daher hat ſich in dem vorigen achtzehnten Jahrhundert weder ein Herausgeber noch ein Ueberſetzer des Diophantus gefunden, wiewohl manche geringhaltige Schrift, ſelbſt aus der ſpäteren Zeit des griechiſchen Alterthums, wieder ans Licht gezogen wurde.

Nur ganz zufällig, nämlich durch eine Anmerkung in Herrn Schmeißers Orthodidaktik der Mathematik (S. 33.), habe ich vor Kurzem erfahren, daß Herr Hofrath Kausler

ſich im Auftrage der Kaiſerlich-Ruſſiſchen Akademie der Wiſſenſchaften zu Petersburg mit einer Bearbeitung des Diophantus beſchäftigt hat. Ich laſſe die Stelle hier abdrucken *),

*) Die mechaniſche, geiſtloſe Behandlung der Algebra iſt ins beſondere von Herrn Hofrath Kausler ſtark gerügt worden. In der Vorrede zu ſeiner Ausgabe des Uflakerſchen Exempelbuchs beginnt er ſo: „Seit mehreren Jahren arbeitete ich für die Ruſſiſch-Kaiſerliche Akademie der Wiſſenſchaften Diophants unſterbliches Werk über die Arithmetik aus, und fand darin einen ſolchen Schatz von den feinſten, ſcharfſinnigſten algebraiſchen Auflöſungen, daß mir die mechaniſche, geiſtloſe Methode der neuen Algebra mit jedem Tage mehr ekelte." u. ſ. w. Schm.

Wie hoch mir auch Diophantus zu ſtehen ſcheint, ſo möchte ich doch nicht unterſchreiben, was Herr Kausler, bei dieſer Gelegenheit zum Nachtheil der neuern Algebra ſagt. Die eigentliche Auflöſung einer Gleichung, wie jeder Rechnungsfrage, iſt und bleibt, wie bei uns ſo auch bei den Alten, ein bloß mechaniſches Geſchäft, und nur die Entwickelung der Gleichung oder die Begründung der Regel für jenes mechaniſche Rechnen iſt ein Geſchäft des Ver-

weil ich nicht habe erfahren können, welche Bewandniß es mit dieſer Ausarbeitung des Diophantus hat, von der wenigſtens in dem größeren Publikum nichts bekannt iſt, und welche eine bloß für die Petersburgiſche Akademie beſtimmte Privatſchrift zu ſein ſcheint.

Ein erfreulicheres Schickſal hat Diophantus kleine Schrift über die Polygonzahlen gehabt, welche in einem gründlichen Kenner der alten Sprachen wie der Mathematik, dem Herrn Stadtrath Poſelger vor wenigen Jahren einen Ueberſetzer gefunden hat *). Eben dieſer Umſtand beſtimmte mich Anfangs, das Buch über die Polygonzahlen von meiner Bearbeitung auszuſchließen, und ich wurde in dieſem

ſtandes und des Scharfſinns. Ich dächte, man könne die Vorzüge der Alten anerkennen und rühmen, ohne darum den Neueren das tiefere Eindringen in die Theorie ſtreitig zu machen, und ohne ſie auf eine ungerechte Weiſe herabzuſetzen. Schulz.

*) Diophantus von Alexandrien über die Polygonzahlen. Ueberſetzt, mit Zuſätzen von Friedrich Theodor Poſelger. Leipzig bei C. Salfeld 1810.

Vorſatz nur wankend gemacht durch die Ueberlegung, daß ſich die kleine Schrift bald vereinzeln könne, und daß es dem Leſer doch erwünſcht ſein werde, alles was wir vom Diophantus beſitzen, beiſammen zu haben. Um ſo bereitwilliger nahm ich das gütige Anerbieten meines verehrten Freundes an, ſeine Ueberſetzung und die ſchätzbaren Zuſätze, mit welchen er ſie ausgeſtattet hat, wieder abdrucken zu laſſen, und dadurch den Werth meines Buches bedeutend zu erhöhen. Auf meinen Wunſch hat Herr Poſelger dieſe Ausgabe noch mit einigen Bemerkungen über den von Diophantus beobachteten Gang der Beweiſe bereichert, welche dem Leſer, der nicht ſchon anderweitig mit der Methode der Alten bekannt iſt, die Mühe des Verſtehens außerordentlich erleichtern werden. Ich ſelbſt habe nur einige allgemeine Bemerkungen über die Art, wie die Alten arithmetiſche Gegenſtände zu behandeln pflegten, vorangeſchickt, denen ich die in der Anmerkung *)

*) Die Griechen unterſcheiden zwei große Zweige der Zahlenwiſſenſchaft, Arithmetik und Logi-

enthaltene Erörterung des Begriffs der Arithmetik, wie ihn nämlich die Griechen gefaßt haben, ſogleich hätte beifügen ſollen.

Ueber meine eigene Arbeit darf ich aus mehr als einem Grunde kurz ſein. Bei der Ueberſetzung ging meine Abſicht dahin, den

ſtik, worüber die Hauptſtelle in Platons Gorgias §. 15. pag. 16, 17. bei Heindorf ſteht, und ſchon von Schneider in ſeinem Wörterbuche citirt wird. Aus Platons Worten folgert nun Schneider, Arithmetik ſei die theoretiſche Rechenkunſt, Logiſtik die praktiſche, wogegen Andere ſagen, Arithmetik umfaſſe die ſogenannten vier Species, Logiſtik aber ſei die Lehre von den Verhältniſſen, alſo wenig mehr, als was der neuere Sprachgebrauch die Regel de Tri nennt. Beides iſt unrichtig, und widerſpricht ſogar Platons eigenen Worten. Die Arithmetik iſt nach Platone τῶν περὶ τὸ ἄρτιόν τι καὶ περιττὸν γνῶσις, ὅσα ἂν ἑκάτερα τυγχάνῃ ὄντα, oder die Wiſſenſchaft von den Eigenſchaften des Geraden und Ungeraden, wie groß es eben auch ſein mag. Die Logiſtik dagegen περὶ τὸ αὐτὸ ἔστι τό τε ἄρτιον καὶ περιττόν, διαφέρει δε τοσοῦτον, ὅτι, καὶ πρὸς αὑτὰ καὶ πρὸς ἄλληλα πῶς ἔχει πλήθους, ἐπισκοπεῖ τὸ περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον ἡ λογιστική, d. h. ihr Gegenſtand

Sinn

Sinn und die Methode des Griechen treu wiederzugeben, ohne mich im Einzelnen an Wort und Buchſtaben ängſtlich zu binden. Mit einer Ueberſetzung, deren höchſtes Ziel das verbum verbo reddere iſt, konnte bei einer Schrift dieſer Art Niemanden gedient

iſt ebenfalls Gerade und Ungerade, mit einem Worte die Zahl, ſie unterſcheidet ſich aber von der Arithmetik dadurch, daß ſie unterſucht, wie Gerade und Ungerade ſich zu ſich ſelbſt, und eines zu dem anderen, in Rückſicht auf Menge oder Vielheit verhält. Offenbar iſt alſo Arithmetik die Theorie der Zahlen und ihrer Eigenſchaften überhaupt, ſie betrachtet, wie Diophantus es ausdrückt, τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν, und alle allgemeinen Unterſuchungen über einfache und zuſammengeſetzte Zahlen, über Potenzen und Würzeln, rationale und irrationale Zahlen, ferner über die Zuſammenſetzung der Zahlen aus gewiſſen Beſtandtheilen oder nach gewiſſen Geſetzen, welche die Alten durch die aus der Geometrie entlehnten Benennungen: Flächenzahl, Körperzahl, Polygonzahl zu bezeichnen pflegen, gehören in das Gebiet der Arithmetik im engeren Sinne, die Logiſtik dagegen hat die eigentliche Rechenkunſt, die theoreti-

ſein; eben ſo wenig mit einer ſogenannten Verneuerung, die nach Gutdünken einſchaltet und weglåßt, oder wenigſtens dem Geſchmack der Neueren gemåß verändert. Nur in einer Art habe ich mir, und vielleicht mit Unrecht, einen Zuſatz erlaubt, indem ich nämlich die

---

ſche wie die praktiſche zu ihrem Gegenſtande, ſie lehrt aus dem Zahlenwerthe der gegebenen Größen durch Schlüſſe (λογισμοὺς) den Zahlenwerth (τὸ πλῆθος) der geſuchten Zahlen beſtimmen, oder mit einem Worte rechnen (λογίζεσθαι), daher zu Athen die Geheimen Ober-Rechnungs-Råthe nicht Ἀριθμητικοὶ ſondern Λογισταὶ genannt wurden. Daß in der angezogenen Stelle bei Platon das ὅσα ἂν ἑκάτερα τυγχάνῃ ὄντα und das τοῦ ἔχει πλήθους den eigentlichen Gegenſatz bilden, iſt gar nicht zu verkennen, und ſo ſtimmt Platons beiläufige Erklärung vollkommen mit der hier gegebenen Begriffsbeſtimmung.

In ſpäterer Zeit hat man angefangen, die Rechnung mit allgemeinen Zeichen **Logiſtik** zu nennen, weil man hier nicht auf den wahren Werth der allgemein bezeichneten Größen, ſondern nur auf ihren Zuſammenhang, oder ihr Verhältniß zu anderen Größen ſieht. In neueren Zeiten iſt es ſogar Sitte geworden, beide Haupttheile der Zahlenwiſſenſchaft

Endgleichung, aus welcher der Werth der unbekannten Größe beſtimmt werden ſoll, mehrentheils als eine vollſtändige Gleichung aufgeführt habe, da Diophantus ſich in der Regel damit begnügt, die eine Seite der Gleichung zu entwickeln, und dann bloß hinzuzufügen: dies ſei dem Ausdrucke gleich, welcher bei mir die rechte Seite der Gleichung bildet.

Vielleicht erſcheint es Manchem, bei dem erſten Anblick wenigſtens, als eine Moderniſirung, daß ich bei dem allgemeinen Ausdruck für die unbekannten Größen mich der neueren Zeichen: x, x^2, — und + bedient habe. Wer indeß aus Diophantus Einleitung ſieht, daß er für die unbekannte Größe und deren Potenzen ebenfalls allgemeine Zeichen, nur ſehr

durch einander zu miſchen, oder eigentlich aus der Arithmetik in engeren Sinne nur dasjenige mitzunehmen, was für die Logiſtik von praktiſcher Wichtigkeit iſt, und erſt Legendre in ſeiner Théorie des Nombres und Gauß in ſeinen disquisitionibus arithmeticis haben den weſentlichen Unterſchied beider Wiſſenſchaften wieder geltend gemacht.

ten Analytik vergleichen, ich ſah aber bald, daß dieſer Anhang zu einem kleinen Buche anwachſen müßte, und mehr Zeit erfordern würde, als mir für jetzt zur Ausarbeitung vergönnt war. Aus dieſem Grunde behielt ich auch das beinahe vollendete Verzeichniß der im Diophantus vorkommenden mathematiſchen Ausdrücke, über welche in den Wörterbüchern ſelten etwas Befriedigendes gefunden wird, lieber ganz zurück, um ſo mehr, da es in einer Ausgabe des griechiſchen Textes wohl einen ſchicklichern Platz finden möchte. Dazu kam, daß mich während der Arbeit ein langwieriges Augenübel überfiel, und den Druck des Werkes auf mehre Monate unterbrach. Der billige Leſer wird mir daher nicht eben vorrechnen, wie viel ich bei dieſer Gelegenheit noch hätte geben ſollen, ſondern lieber freundlich annehmen, was ich in meiner Läge und nach meinen Kräften zu geben im Stande war.

Berlin am 23. März 1822.

Schulz.

D i o p h a n t u s

von Alexandria

arithmetiſche Aufgaben.

Digitized by Google

Einleitung.

Ich ſehe, mein theuerſter Dionyſius, mit welchem Eifer du die Auflöſung der arithmetiſchen Aufgaben zu erlernen wünſcheſt; ich habe daher verſucht, das Verfahren wiſſenſchaftlich darzuſtellen, indem ich mit der eigentlichen Grundlage deſſelben anfange, nämlich mit einer Entwickelung der eigenthümlichen Natur und Beſchaffenheit der Zahlen. Die Sache ſcheint vielleicht etwas ſchwierig, da ſie noch gar nicht bekannt iſt, und Anfänger haben immer wenig Hoffnung eines glücklichen Fortgangs; aber dein Eifer und meine Darſtellung wird dir alles recht faßlich machen, denn man lernt ſchnell, wenn Eifer und Unterweiſung zuſammenkommt.

I.

Du weißt unter andern, daß eine jede Zahl aus einer gewiſſen Menge von Einheiten beſteht,

und daraus iſt klar, daß ihr Werth ohne Ende zunehmen kann. Unter den Zahlen giebt es aber:

1) Quadratzahlen, welche entſtehen, wenn man eine Zahl mit ſich ſelbſt multiplicirt, und dieſe Zahl wird die Seite oder die Wurzel der Quadratzahl genannt.

2) Würfel- oder Kubikzahlen, welche entſtehen, wenn man eine Quadratzahl mit ihrer Wurzel multiplicirt.

3) Biquadratzahlen, welche entſtehen, wenn man Quadratzahlen mit ſich ſelbſt multiplicirt.

4) Quadrato-Kubikzahlen, welche entſtehen, wenn man Quadratzahlen und Kubikzahlen von derſelben Wurzel mit einander multiplicirt.

5) Kubo-Kubikzahlen, welche entſtehen, wenn man Kubikzahlen mit ſich ſelbſt multiplicirt.

Wenn man nun auf die Summe, oder auf den Unterſchied, auf das Produkt, oder auf das Verhältniß dieſer Zahlen, entweder aller oder nur etlicher, gegen ihre Wurzeln ſieht, ſo laſſen ſich ſehr viele arithmetiſche Aufgaben bilden, welche

auf dem Wege, den ich dir zeigen werde, ſich auflöſen laſſen.

II.

Eine Quadratzahl wird im Griechiſchen δύναμις genannt und durch δ mit dem Merkmal υ bezeichnet, alſo $\delta^{\bar{\upsilon}}$.

Der Kubus, welcher durch Multiplication des Quadrats mit ſeiner Wurzel entſteht, wird durch κ mit dem Merkmal υ bezeichnet, alſo $\kappa^{\bar{\upsilon}}$.

Das Biquadrat, welches durch Multiplication des Quadrats mit ſich ſelber entſteht, wird durch ein doppeltes δ mit dem Merkmal υ bezeichnet, alſo $\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$.

Die Quadrato-Kubikzahl, welche entſteht, wenn man das Quadrat und den Kubus derſelben Wurzel multiplicirt, wird durch δκ mit dem Merkmal υ bezeichnet, alſo $\delta\kappa^{\bar{\upsilon}}$.

Die Kubo-Kubikzahl, welche entſteht, wenn man die Kubikzahl mit ſich ſelbſt multiplicirt, wird durch ein doppeltes κ mit dem Merkmal υ bezeichnet, alſo durch $\kappa\kappa^{\bar{\upsilon}}$.

Eine Zahl aber, welche keine der hier erwähnten Eigenſchaften hat, ſondern bloß eine unbe-

kannte Anzahl von Einheiten enthält, wird ſchlechthin *die Zahl* genannt und durch ς' bezeichnet.

Endlich giebt es noch ein beſtändiges Zeichen für *beſtimmte* Zahlen, nämlich die Einheit, und ihr Zeichen iſt μ mit dem Merkmal o, alſo μ^{o}.

III.

So wie aliquote Theile der Zahlen überhaupt nach ihrem Nenner benannt werden, z. B. der dritte Theil ein *Drittel*, der vierte ein *Viertel*, ſo werden auch aliquote Theile, deren Nenner die hier erwähnten allgemeinen Ausdrücke ſind, von dieſem Nenner benannt.

Ein Bruch, deſſen Nenner die unbekannte Zahl iſt, heißt ein *Bruch der unbekannten Zahl* oder auch ein *einfacher Bruch*; ein Bruch, deſſen Nenner das Quadrat der unbekannten Zahl iſt, heißt ein *quadratiſcher Bruch*; ein Bruch, deſſen Nenner der Kubus der unbekannten Zahl iſt, heißt ein *kubiſcher Bruch*; ein Bruch, deſſen Nenner das Biquadrat iſt, heißt ein *biquadratiſcher Bruch*; ein Bruch, deſſen Nenner die Quadrato-Kubikzahl iſt, heißt ein

quadrato-kubiſcher Bruch; ein Bruch, deſſen Nenner die Kubo-Kubikzahl iſt, heißt ein kubo-kubiſcher Bruch.

Um einen ſolchen Bruch zu ſchreiben, werden wir neben den Zähler das Zeichen des Nenners ſetzen, durch einen Strich aber die Bruchform andeuten.

IV.

Nachdem ich dir alſo die Benennung aller einzelnen Zahlen angegeben habe, will ich zur Multiplication derſelben übergehen. Dieſe wird dir aber vollkommen deutlich ſein, da ſie beinahe durch die bloße Benennung ſchon vorher erklärt iſt.

Wenn man alſo die unbekannte Zahl mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſo erhält man das Quadrat derſelben; wenn man ſie mit dem Quadrat multiplicirt, ſo erhält man den Kubus; wenn man ſie mit dem Kubus multiplicirt, ſo erhält man die Quadrato-Kubikzahl, und wenn man ſie mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, ſo erhält man die Kubo-Kubikzahl.

Wenn man ferner das Quadrat der unbekannten Größe mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſo er-

hält man das Biquadrat; wenn man es mit dem Kubus multiplicirt, ſo erhält man die Quadrato-Kubikzahl, und wenn man es mit dem Biquadrat multiplicirt, ſo erhält man die Kubo-Kubikzahl.

Wenn man endlich den Kubus mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſo erhält man ebenfalls die Kubo-Kubikzahl.

V.

Wenn man irgend eine dieſer Zahlen mit einem gleichnamigen Bruche multiplicirt, ſo erhält man eine beſtimmte Zahl zum Produkte.

VI.

Da beſtimmte Zahlen bei allen Rechnungen wieder beſtimmte Zahlen geben, ſo wird das Produkt einer beſtimmten Zahl und eines allgemeinen Ausdrucks wieder ein Ausdruck derſelben Art ſein.

VII.

Wenn man Brüche, deren Nenner allgemeine Ausdrücke ſind, mit einander multiplicirt, ſo iſt der Nenner des Produktes dem Produkt der allgemeinen Ausdrücke gleich.

Wenn man z. B. einen einfachen Bruch mit einem Bruch derſelben Art multiplicirt, ſo er-

hält man einen quadratiſchen Bruch; wenn man ihn mit einem quadratiſchen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen kubiſchen Bruch; wenn man ihn mit einem kubiſchen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen biquadratiſchen Bruch; wenn man ihn mit einem biquadratiſchen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen quadrato-kubiſchen Bruch; wenn man ihn endlich mit einem quadrato-kubiſchen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen kubo-kubiſchen Bruch; ſo daß alſo der Nenner des Produktes alle Mal mit dem Produkt der Nenner einerlei iſt.

Wenn man einen quadratiſchen Bruch mit einem einfachen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen kubiſchen Bruch; wenn man ihn mit einem quadratiſchen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen biquadratiſchen Bruch; wenn man ihn mit einem kubiſchen Bruche multiplicirt, ſo erhält man einen quadrato-kubiſchen Bruch, und wenn man ihn mit einem biquadratiſchen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen kubo-kubiſchen Bruch.

Wenn man einen kubiſchen Bruch mit einem einfachen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen biquadratiſchen Bruch; wenn man ihn mit

einem quadratiſchen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen quadrato-kubiſchen Bruch, und wenn man ihn mit einem kubiſchen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen kubo-kubiſchen Bruch.

Wenn man einen biquadratiſchen Bruch mit einem einfachen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen quadrato-kubiſchen Bruch, und wenn man ihn mit einem quadratiſchen Bruch multiplicirt, ſo erhält man einen kubo-kubiſchen Bruch.

Wenn man endlich einen quadrato-kubiſchen Bruch mit einem einfachen Bruche multiplicirt, ſo erhält man ebenfalls einen kubo-kubiſchen Bruch.

VIII.

Dagegen giebt ein einfacher Bruch, mit dem Quadrat multiplicirt, die unbekannte Zahl; mit dem Kubus multiplicirt, das Quadrat; mit dem Biquadrat multiplicirt, den Kubus; mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, das Biquadrat; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, die Quadrato-Kubikzahl.

Ein quadratiſcher Bruch mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen einfachen Bruch; mit dem Kubus multiplicirt, die unbekannte Zahl;

mit dem Biquadrat multiplicirt, das Quadrat; mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, den Kubus; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, das Biquadrat.

Ein kubiſcher Bruch mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen quadratiſchen Bruch; mit dem Quadrat multiplicirt, einen einfachen Bruch; mit dem Biquadrat multiplicirt, die unbekannte Zahl; mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, das Quadrat; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, den Kubus.

Ein biquadratiſcher Bruch, mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen kubiſchen Bruch; mit dem Quadrat multiplicirt, einen quadratiſchen Bruch; mit dem *Kubus multiplicirt*, einen einfachen Bruch; mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, die unbekannte Zahl; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, das Quadrat.

Ein quadrato-kubiſcher Bruch mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen biquadratiſchen Bruch; mit dem Quadrat multiplicirt, einen kubiſchen Bruch; mit dem Kubus multiplicirt, einen quadratiſchen Bruch; mit dem Biquadrat multiplicirt, einen einfachen Bruch; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, die unbekannte Zahl.

Ein kubo-kubiſcher Bruch mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen quadrato-kubiſchen Bruch; mit dem Quadrat multiplicirt, einen biquadratiſchen Bruch; mit dem Kubus multiplicirt, einen kubiſchen Bruch; mit dem Biquadrat multiplicirt, einen quadratiſchen Bruch; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, einen einfachen Bruch.

IX.

Eine negative Zahl mit einer negativen Zahl multiplicirt, giebt eine poſitive Zahl; eine negative Zahl mit einer poſitiven Zahl multiplicirt, giebt eine negative Zahl. Das Zeichen einer negativen Zahl iſt ein verſtümmeltes und umgekehrtes ψ, nämlich ᛦ.

X.

Nachdem ich dir nun die Multiplication der allgemeinen Ausdrücke gezeigt habe, ſo wird dir die Diviſion derſelben keine Schwierigkeit machen. Es iſt aber ſehr zweckmäßig, ehe man ſich an die Auflöſung der Aufgaben macht, ſich in der Addition, Subtraction und Multiplication dieſer Ausdrücke zu üben; beſonders wie man eine Reihe

poſitiver und negativer Ausdrücke mit ungleichen Zahlen-Factoren zu andern allgemeinen Ausdrücken, die entweder bloß poſitiv ſind, oder aus poſitiven und negativen Gliedern beſtehen, addiren muß; ferner, wie man von einer Reihe poſitiver und negativer Zahlen andre abzieht, die entweder bloß poſitiv ſind, oder auch aus poſitiven und negativen Gliedern beſtehen.

XI.

Wenn man nun bei einer Aufgabe auf eine Gleichung kommt, die zwar aus den nämlichen allgemeinen Ausdrücken beſteht, jedoch ſo, daß die Coefficienten an beiden Seiten ungleich ſind, ſo muß man Gleiches von Gleichem abziehen, bis man eine Gleichung zwiſchen zwei eingliedrigen Ausdrücken erhält.

Wenn auf der einen oder auf beiden Seiten negative oder fehlende Größen vorkommen, ſo muß man dieſe fehlenden Größen an beiden Seiten addiren, bis man an beiden Seiten poſitive Größen erhält, und hierauf wieder Gleiches von Gleichem abziehen, bis man an jeder Seite nur einen Ausdruck behält. Dieſe Kunſtgriffe muß man nun

auf den bei einer Aufgabe gemachten Anſatz, wenn es möglich iſt, ſo lange anwenden, bis man eine Gleichung zwiſchen zwei eingliedrigen Ausdrücken erhält; in der Folge aber will ich dir zeigen, wie man die Aufgabe löſet, wenn zuletzt ein zweigliedriger Ausdruck einem eingliedrigen gleich wird. Jetzt aber wollen wir uns zu den Aufgaben ſelber wenden, da wir an dem von den allgemeinen Zahlausdrücken hergenommenen Stoff ein weites Feld haben, arithmetiſche Aufgaben zu bilden. Da aber bei der großen Maſſe der Zahlen der Anfänger nur langſam fortſchreitet, und überdies das Erlernte leicht vergißt, ſo habe ich es für zweckmäßig gehalten, diejenigen Aufgaben, welche ſich zu einer nähern Entwickelung eignen, und vorzüglich die erſten Elementaraufgaben, gehörig zu erklären, und dabei von den einfachſten zu den verwickeltern fortzuſchreiten. Denn ſo wird es dem Anfänger faßlich werden, und das Verfahren wird ſich ſeinem Gedächtniſſe einprägen, da die ganze Behandlung der Aufgaben dreizehn Bücher umfaßt.

Erſtes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei Zahlen theilen, deren Unterſchied gleichfalls gegeben iſt.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 100, der gegebene Unterſchied aber 40, man ſoll die beiden Zahlen ſuchen.

Man ſetze die kleinere der beiden Zahlen $= x$, ſo iſt die größere $= x + 40$ und die Summe beider $= 2x + 40$. Die gegebene Zahl aber war 100, folglich wird

$$2x + 40 = 100.$$

Zieht man nun Gleiches von Gleichem ab, nämlich an beiden Seiten 40, ſo bleibt $2x = 60$, und es wird $x = 30$.

Setzen wir dieſen Werth von x in die allgemeinen Ausdrücke für die geſuchten Zahlen, ſo iſt die kleinere 30, und die größere 70, und der Beweis fällt ſogleich in die Augen.

II. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in einem vorgeſchriebenen Verhältniſſe theilen.

Aufloſung.

Die gegebene Zahl ſei 60; dieſe ſoll ſo getheilt werden, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren ſei.

Man ſetze die kleinere Zahl $=x$, ſo wird die größere $=3x$, alſo das Dreifache der kleineren ſein. Die Summe beider Zahlen ſoll 60 ſein, dieſe Summe iſt aber auch $=4x$, folglich wird

$$4x = 60 \text{ und } x = 15.$$

Die kleinere der beiden Zahlen iſt alſo 15, die größere 45.

III. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei andere von der Beſchaffenheit theilen, daß die eine um eine vorgeſchriebene Zahl größer iſt, als ein beſtimmtes Vielfaches der anderen.

Aufloſung.

Es werde z. B. verlangt, die Zahl 80 in zwei andere zu theilen, und zwar ſo, daß die größere um 4 größer ſei, als das Dreifache der kleineren.

Man

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, und die größere $= 3x + 4$; ſo wird die größere um 4 größer ſein, als das Dreifache der kleineren. Die Summe dieſer beiden Zahlen ſoll 80 ſein; dieſe Summe iſt aber auch $4x + 4$, alſo iſt

$$4x + 4 = 80.$$

Nun ziehe ich Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$4x = 76 \text{ und } x = 19.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 19, und die größere 61; wenn ich nämlich zu dem Dreifachen der kleineren Zahl die 4 Einheiten addire, die ich vorhin von 80 abzog. Dieſe zog ich nämlich ab, um zu finden, wie groß x ſei, ich addire ſie aber nachher wieder zu der größeren Zahl, nachdem ich den Werth von x berechnet habe.

IV. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen ſuchen, die ein gegebenes Verhältniß und einen gegebenen Unterſchied haben.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß die größere Zahl das Fünffache der kleineren, der Unterſchied beider aber 20 ſein ſolle.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, ſo iſt die größere

5x. Der Unterſchied der beiden Zahlen ſoll 20 ſein, dieſer Unterſchied iſt aber auch 4x; daher iſt

$$4x = 20 \text{ und } x = 5.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 5, und die größere 25. Die größere iſt alſo wirklich das Fünffache der kleineren, und der Unterſchied beider iſt 20.

V. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei andere von der Beſchaffenheit theilen, daß, wenn man von jeder einen vorgeſchriebenen, jedoch nicht den nämlichen, aliquoten Theil nimmt, dieſe Theile eine vorgeſchriebene Summe geben.

Dieſe Summe muß aber zwiſchen denjenigen Zahlen liegen, welche man erhält, wenn man von der zuerſt gegebenen Zahl die vorgeſchriebenen Theile nimmt.

Auflöſung.

Es werde alſo verlangt, die Zahl 100 in zwei Zahlen von der Beſchaffenheit zu theilen, daß der dritte Theil der erſten und der fünfte Theil der zweiten zuſammengenommen = 30 ſei.

Ich ſetze den fünften Theil der zweiten Zahl = x, ſo wird die zweite Zahl ſelber 5x ſein. Der dritte Theil

der erſten Zahl wird nun $30-x$, und die erſte Zahl ſelber $90-3x$ ſein.

Ferner ſoll die Summe beider Zahlen $=100$ ſein, dieſe Summe iſt aber auch $90+2x$, folglich wird

$$90+2x=100.$$

Hierauf ziehe ich Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$2x=10 \text{ und } x=5.$$

Wir hatten den fünften Theil der zweiten Zahl $=x$ geſetzt, dieſer iſt alſo $=5$, und die zweite Zahl ſelbſt 25. Der dritte Theil der erſten Zahl war $30-x$, dieſer iſt alſo 25, und die erſte Zahl ſelbſt 75. Auch giebt der dritte Theil der erſten und der fünfte Theil der zweiten Zahl wirklich die vorgeſchriebene Summe 30.

VI. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei andere von der Beſchaffenheit theilen, daß ein beſtimmter Theil der erſten um eine vorgeſchriebene Zahl größer ſei, als ein beſtimmter Theil der zweiten.

Dieſe vorgeſchriebene Zahl muß aber kleiner ſein als die Zahl, welche herauskommt, wenn man von der zuerſt gegebenen Zahl den ſovielten Theil nimmt, als man von der größeren der gefundenen Zahlen nehmen ſoll.

Auflöſung.

Es werde alſo verlangt, 100 in zwei Zahlen von der Beſchaffenheit zu theilen, daß der vierte Theil der erſten um 20 größer ſei, als der ſechste Theil der zweiten.

Ich ſetze den ſechsten Theil der zweiten Zahl $= x$, ſo iſt die zweite Zahl ſelber $= 6x$, der vierte Theil der erſten $= x + 20$ und die erſte Zahl ſelber $= 4x + 80$.

Nun ſoll die Summe der beiden geſuchten Zahlen $= 100$ ſein, dieſe Summe iſt aber auch $10x + 80$, folglich iſt

$$10x + 80 = 100.$$

Nun ziehe ich Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$10x = 20$ und $x = 2$.

Wir haben den ſechsten Theil der zweiten Zahl $= x$ geſetzt, die zweite Zahl iſt alſo 12. Den vierten Theil der erſten Zahl hatten wir $= x + 20$ geſetzt; dieſer iſt alſo 22, und die erſte Zahl ſelber 88.

Hier iſt alſo der vierte Theil der erſten Zahl um 20 größer als der ſechste Theil der zweiten Zahl, und beide Zahlen geben zuſammen die vorgeſchriebene Zahl 100.

VII. Aufgabe.

Man ſoll von einer und derſelben Zahl zwei gegebene Zahlen abziehen, und beide Reſte ſollen ein vorgeſchriebenes Verhältniß haben.

Aufloͤſung.

Es werde alſo verlangt, daß man von einer und derſelben Zahl das eine Mal 100, das andere Mal 20 abziehe, und daß der groͤßere Reſt das Dreifache des kleineren ſei.

Man ſetze die geſuchte Zahl = x; wenn ich davon 100 abziehe, ſo bleibt x—100, und wenn ich davon 20 abziehe, ſo bleibt x—20. Nun ſoll der groͤßere Reſt das Dreifache des kleineren, folglich der kleinere Reſt, drei Mal genommen, dem groͤßeren Reſte gleich ſei. Der kleinere Reſt, drei Mal genommen, iſt aber 3x—300, folglich wird

$$3x - 300 = x - 20.$$

Nun addire man an beiden Seiten die fehlenden Groͤßen, ſo erhaͤlt man

$$3x = x + 280.$$

Hierauf ziehe man Gleiches von Gleichem ab, ſo erhaͤlt man

$$2x = 280 \text{ und } x = 140.$$

Die geſuchte Zahl habe ich = x geſetzt, dieſe Zahl iſt alſo 140. Ziehe ich davon 100 ab, ſo bleibt 40; ziehe ich aber 20 ab, ſo bleibt 120; und der groͤßere Reſt iſt offenbar das Dreifache des kleineren.

VIII. Aufgabe.

Man ſoll zu zwei gegebenen Zahlen die nämliche Zahl addiren, und beide Summen ſollen ein vorgeſchriebenes Verhältniß haben.

Dies vorgeſchriebene Verhältniß muß aber kleiner ſein, als das Verhältniß der größeren gegebenen Zahl zu der kleineren.

Auflöſung.

Es werde alſo verlangt, daß man zu 100 und zu 20 die nämliche Zahl addire, und daß die größere Summe das Dreifache der kleineren ſei.

Man ſetze die unbekannte Zahl, welche zu beiden gegebenen Zahlen addirt werden ſoll, $= x$. Wenn ich dazu 100 addire, ſo iſt die Summe $x + 100$, und wenn ich dazu 20 addire, ſo iſt die Summe $x + 20$. Nun ſoll die größere Summe das Dreifache der kleineren, alſo die kleinere Summe, drei Mal genommen, der größeren Summe gleich ſein. Die kleinere Summe, drei Mal genommen, iſt aber $3x + 60$, folglich iſt

$$3x + 60 = x + 100.$$

Man ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$2x = 40,\ \text{alſo}\ x = 20.$$

Wir haben die geſuchte Zahl $= x$ geſetzt; dieſe Zahl iſt alſo 20. Addirt man dieſelbe zu 100, ſo iſt die

Summe 120; addirt man ſie aber zu 20, ſo iſt die Summe 40, und die größere Summe iſt das Dreifache der kleineren.

IX. Aufgabe.

Man ſoll von zwei gegebenen Zahlen die nämliche Zahl abziehen, und die Reſte ſollen ein vorgeſchriebenes Verhältniß haben.

Dies vorgeſchriebene Verhältniß muß aber größer ſein, als das Verhältniß, welches die größere der gegebenen Zahlen zu der kleineren hat.

Auflöſung.

Es ſei alſo vorgeſchrieben, daß man von 20 und von 100 die nämliche Zahl abziehen, und daß der größere Reſt das Sechsfache des kleineren ſein ſolle.

Man ſetze die unbekannte Zahl, welche von beiden gegebenen abgezogen werden ſoll, $= x$. Zieht man dieſe von 100 ab, ſo iſt der Reſt $100 - x$, zieht man ſie aber von 20 ab, ſo iſt der Reſt $20 - x$. Nun ſoll der größere Reſt das Sechsfache des kleineren, alſo der kleinere Reſt, ſechs Mal genommen, dem größeren Reſte gleich ſein. Der kleinere Reſt, ſechs Mal genommen, iſt aber $120 - 6x$, folglich wird

$$120 - 6x = 100 - x.$$

Nun addire man an beiden Seiten die fehlenden Größen und ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$5x = 20, \text{ folglich } x = 4.$$

Wir hatten die abzuziehende Zahl $= x$ geſetzt, dieſe Zahl iſt alſo 4. Zieht man dieſe von 100 ab, ſo bleiben 96; zieht man ſie aber von 20 ab, ſo bleiben 16, und der größere Reſt iſt das Sechsfache des kleineren.

X. Aufgabe.

Es ſind zwei ungleiche Zahlen gegeben, man ſoll zu der kleineren eine Zahl addiren, und von der größeren eben dieſe Zahl abziehen, und jene Summe ſoll zu dieſem Reſte ein vorgeſchriebenes Verhältniß haben.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß man zu 20 eine Zahl addire, und eben dieſe Zahl von 100 ſubtrahire, und daß alsdann die größere Zahl das Vierfache der kleineren ſei.

Man ſetze die unbekannte Zahl, die man das eine Mal addiren, das andre Mal ſubtrahiren ſoll, $= x$. Addire ich dieſe zu 20, ſo iſt die Summe $x + 20$; ziehe ich ſie aber von 100 ab, ſo iſt der Reſt $100 - x$. Nun ſoll jene Summe das Vierfache dieſes Reſtes, alſo der Reſt, vier Mal genommen, jener Summe gleich ſein. Der Reſt, vier Mal genommen, iſt aber $400 - 4x$, folglich iſt

$$400 - 4x = x + 20.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$5x = 380 \text{ und } x = 76.$$

Wir hatten die geſuchte Zahl $= x$ geſetzt, dieſe Zahl iſt alſo 76. Addirt man dieſe zu 20, ſo iſt die Summe 96; ſubtrahirt man ſie aber von 100, ſo iſt der Reſt 24 und jene Summe iſt alſo das Vierfache dieſes Reſtes.

XI. Aufgabe.

Es ſind zwei Zahlen gegeben, man ſoll die eine derſelben zu einer gewiſſen Zahl addiren, die andere aber von eben dieſer Zahl ſubtrahiren, und die dadurch entſtehenden Zahlen ſollen ein vorgeſchriebenes Verhältniß haben.

Auflöſung.

Es werde alſo verlangt, daß man 20 zu einer gewiſſen Zahl addire und 100 von eben dieſer Zahl abziehe, und daß alsdann die größere der entſtandenen Zahlen das Dreifache der kleineren ſei.

Die geſuchte Zahl heiße x; wenn wir zu dieſer 20 addiren, ſo kommt $x + 20$, wenn wir 100 von ihr ſubtrahiren, ſo kommt $x - 100$. Nun ſoll die größere dieſer Zahlen das Dreifache der kleineren, alſo die kleinere Zahl, drei Mal genommen, der größeren gleich ſein. Die

kleinere Zahl, drei Mal genommen, iſt aber $3x - 300$, und es wird folglich

$$3x - 300 = x + 20.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo erhält man

$$2x = 320, \text{ folglich } x = 160.$$

Die größere Zahl wird alſo 180, die kleinere 60, und die größere iſt das Dreifache der kleineren.

XII. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl auf eine doppelte Weiſe in zwei andere zerſtückeln, und zwar ſo, daß die Zahlen aus der erſten Zerſtückelung zu den Zahlen aus der zweiten Zerſtückelung ein vorgeſchriebenes Verhältniß haben.

Auflöſung.

Es werde alſo verlangt, die Zahl 100 auf doppelte Weiſe in zwei andere zu zerſtückeln, und zwar ſo, daß die größere Zahl aus der erſten Zerſtückelung doppelt ſo groß ſei als die kleinere Zahl aus der zweiten Zerſtückelung, hingegen die größere Zahl aus der zweiten Zerſtückelung drei Mal ſo groß, als die kleinere Zahl aus der erſten Zerſtückelung.

Man ſetze die kleinere Zahl aus der zweiten Zerſtückelung $= x$, ſo iſt die größere Zahl aus der erſten Zer-

ſtückelung $2x$. Dann wird aber die kleinere Zahl aus der erſten Zerſtückelung $100-2x$ ſein, und weil das Dreifache derſelben mit der größeren Zahl aus der zweiten Zerſtückelung gleich ſein ſoll, ſo iſt dieſe letztere Zahl $300-6x$.

Nun ſollen aber beide Zahlen aus der zweiten Zerſtückelung zuſammen genommen 100 geben; ſie geben aber auch $300-5x$, folglich iſt

$$300-5x=100 \text{ und } x=40.$$

Die größere Zahl aus der erſten Zerſtückelung war $2x$, und wird alſo $=80$. Die kleinere Zahl aus derſelben Zerſtückelung war $100-2x$, und wird alſo $=20$.

Die größere Zahl aus der zweiten Zerſtückelung war $300-6x$, und wird alſo $=60$; die kleinere Zahl aus eben dieſer Zerſtückelung ſetzten wir $=x$, und dieſe wird alſo $=40$. Die Richtigkeit der Auflöſung fällt übrigens in die Augen.

XIII. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl auf dreifache Art in zwei andere zerſtückeln, und zwar ſo daß eine Zahl aus der erſten Zerſtückelung zu einer Zahl aus der zweiten Zerſtückelung, ferner die andere Zahl aus der zweiten Zerſtückelung zu einer Zahl aus der dritten Zerſtückelung und endlich die andere Zahl aus der dritten Zerſtückelung zu der

anderen Zahl aus der erſten Zerſtückelung ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es werde alſo verlangt, die Zahl 100 auf dreifache Weiſe zu zerſtückeln, und zwar ſo, daß die größere Zahl aus der erſten Zerſtückelung drei Mal ſo groß ſei, als die kleinere Zahl aus der zweiten, ferner die größere Zahl aus der zweiten Zerſtückelung zwei Mal ſo groß, als die kleinere Zahl aus der dritten, und endlich die größere Zahl aus der dritten Zerſtückelung vier Mal ſo groß, als die kleinere Zahl aus der erſten.

Man ſetze die kleinere Zahl aus der dritten Zerſtückelung $= x$, ſo iſt die größere Zahl aus der zweiten Zerſtückelung $2x$, und weil die ganze Zahl $= 100$, ſo iſt die kleinere Zahl aus der zweiten Zerſtückelung $100 - 2x$. Dieſe Zahl, drei Mal genommen, giebt ferner die größere Zahl aus der erſten Zerſtückelung, und dieſe wird alſo $300 - 6x$, die kleinere Zahl aus eben dieſer Zerſtückelung aber $6x - 200$ ſein. Dieſe Zahl, vier Mal genommen, giebt endlich die größere Zahl aus der dritten Zerſtückelung und dieſe wird alſo $24x - 800$.

Nun müſſen die beiden Zahlen aus der dritten Zerſtückelung zuſammen genommen 100 geben, ſie geben aber auch $25x - 800$, daher iſt

$$25x - 800 = 100 \text{ und } x = 36.$$

Die kleinere Zahl aus der dritten Zerſtückelung iſt alſo 36, die größere 64, die kleinere Zahl aus der erſten Zerſtückelung 16, die größere 84, die kleinere Zahl endlich aus der zweiten Zerſtückelung iſt 28, die größere 72, und es fällt in die Augen, daß dieſe Zahlen der Aufgabe wirklich genügen.

XIV. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt zu ihrer Summe ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Es muß aber die Menge von Einheiten, welche man für eine der geſuchten Zahlen annimmt, größer ſein, als der Exponent des vorgeſchriebenen Verhältniſſes.

Auflöſung.

Es ſei alſo vorgeſchrieben, daß das Produkt der beiden Zahlen drei Mal ſo groß ſein ſoll, als ihre Summe.

Man ſetze die eine der geſuchten Zahlen $= x$, die andere aber ſei, nach der hinzugefügten Bedingung, größer als 3, alſo etwa $= 12$, ſo wird das Produkt dieſer Zahlen $12x$ und ihre Summe $= x + 12$.

Nun ſoll die kleinere Zahl, drei Mal genommen, der größeren gleich werden, es iſt daher

$$3x + 36 = 12x, \text{ folglich } x = 4.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 4, und die größere 12, und dieſe Zahlen genügen den Bedingungen der Aufgabe.

XV. Aufgabe.

Man ſucht zwei Zahlen von der Beſchaffenheit, daß, wenn jede von der andern eine vorgeſchriebene Menge von Einheiten erhält, die Summe zu dem Reſte in beiden Fällen ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die erſte Zahl, wenn ſie von der zweiten 30 Einheiten erhält, doppelt ſo groß als der Reſt ſei; die zweite aber, wenn ſie von der erſten 50 Einheiten erhält, drei Mal ſo groß, als der Reſt werde.

Man ſetze die zweite Zahl $= x + 30$, weil ſie 30 Einheiten abgeben ſoll; ſo wird die erſte Zahl $= 2x - 30$ ſein, damit, wenn ſie von der zweiten 30 erhält, die erſte doppelt ſo groß als die zweite werde.

Nun ſoll auch die zweite Zahl, wenn ſie von der erſten 50 erhält, drei Mal ſo groß, als der Reſt der erſten Zahl ſein. Wenn man aber von der erſten Zahl 50 abzieht, ſo bleibt $2x - 80$, und wenn man zu der zweiten 50 hinzulegt, ſo kommt $x + 80$. Endlich ſoll $x + 80$ drei Mal ſo groß ſein, als $2x - 80$, alſo iſt

$$x + 80 = 6x - 240 \text{ und } x = 65.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 98, die zweite 94, und dieſe beiden Zahlen leiſten, was die Aufgabe verlangt.

XVI. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß je zwei derſelben eine vorgeſchriebene Summe geben.

Es muß aber die halbe Summe der drei gegebenen Zahlen größer ſei, als jede von ihnen einzeln genommen.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der erſten und zweiten $=20$, die Summe der zweiten und dritten $=30$, die Summe der erſten und dritten $=40$ ſei.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen $=x$. Nun ſoll die Summe der erſten und zweiten $=20$ ſein, ziehe ich alſo 20 von x ab, ſo erhalte ich die dritte $=x-20$. Auf eben dieſe Weiſe aber finde ich die erſte Zahl $=x-30$ und die zweite $=x-40$. Endlich ſoll die Summe der drei Zahlen $=x$ ſein; dieſe Summe iſt aber auch $3x-90$, alſo wird

$$3x-90=x \text{ und } x=45.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 15, die zweite 5, die dritte 25, und der Beweis fällt in die Augen.

XVII. Aufgabe.

Man ſoll vier Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß je drei derſelben, zuſammen genommen, eine vorgeſchriebene Summe geben.

Es muß aber das Drittel von der Summe der vier gegebenen Zahlen größer ſein, als jede derſelben einzeln genommen.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß die Summe der erſten und der beiden folgenden 20, die Summe der zweiten und der beiden folgenden 22, die Summe der dritten und der beiden folgenden 24, die Summe der vierten und der beiden folgenden 27 ſein ſolle.

Man ſetze die Summe der vier Zahlen $= x$. Ziehe ich davon die Summe der drei erſten oder 20 ab, ſo erhalte ich die vierte $= x - 20$. Auf gleiche Weiſe findet man aber die erſte $= x - 22$, die zweite $= x - 24$ und die dritte $= x - 27$.

Nun ſoll die Summe dieſer Zahlen $= x$ ſein; dieſe Summe iſt aber auch $= 4x - 93$. Man hat alſo

$$4x - 93 = x \text{ und } x = 31.$$

In unſerem Falle iſt alſo die erſte Zahl 9, die zweite 7, dritte 4, die vierte 11, und dieſe Zahlen leiſten der Aufgabe Genüge.

XVIII.

XVIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe von je zweien um eine vorgeſchriebene Zahl größer ſei, als die dritte.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der erſten und zweiten Zahl um 20 größer ſei, als die dritte; die Summe der zweiten und dritten um 30 größer als die erſte; die Summe der erſten und dritten um 40 größer als die zweite.

Man ſetze die Summe aller drei Zahlen $= 2x$. Da nun die Summe der erſten und zweiten um 20 größer ſein ſoll, als die dritte, ſo lege man an beiden Seiten die dritte hinzu, ſo wird die Summe aller drei Zahlen aus dem Unterſchiede 20, und der dritten Zahl, zwei Mal genommen, beſtehen müſſen. Zieht man nun von der Summe der drei Zahlen, oder von $2x$, den Unterſchied 20 ab, ſo erhält man das Doppelte der dritten Zahl $= 2x - 20$, die dritte Zahl ſelbſt iſt alſo $x - 10$. Auf gleiche Weiſe findet man ferner die erſte Zahl $= x - 15$, und die zweite Zahl $= x - 20$.

Nun ſoll die Summe aller drei Zahlen $2x$ ſein; dieſe Summe iſt aber auch $3x - 45$. Man hat alſo die Gleichung

$$3x - 45 = 2x, \text{ folglich } x = 45.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 30, die zweite 25, die dritte 35.

XIX.

Eine andere Auflöſung der vorigen Aufgabe.

Da die Summe der erſten und zweiten Zahl um 20 größer ſein ſoll, als die dritte, ſo ſetze man die dritte $= x$; ſo wird die Summe der erſten und zweiten Zahl $= x + 20$ ſein.

Da ferner die Summe der zweiten und dritten um 30 größer ſein ſoll, als die erſte, ſo ſetze man die zweite der halben Summe von $20 + 30$ gleich, alſo $= 25$.

Nun war die Summe der erſten und zweiten Zahl $= x + 20$, die zweite ſelbſt aber iſt 25, die erſte Zahl muß alſo dem Reſt $x - 5$ gleich ſein.

Endlich ſoll die Summe der erſten und dritten um 40 größer ſein, als die zweite, aber die Summe der erſten und dritten Zahl iſt $2x - 5$, und es iſt alſo

$$2x - 5 = 25 + 40 = 65.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, ſo wird

$$2x = 70, \text{ folglich } x = 35.$$

Die erſte Zahl haben wir $= x - 5$ geſetzt, dieſe Zahl wird alſo 30, die zweite ſetzten wir $= 25$, die dritte $= x$, und dieſe iſt alſo 35.

XX. Aufgabe.

Man ſoll vier Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe von je dreien um eine vorgeſchriebene Zahl größer wird, als die vierte.

Jede der gegebenen Zahlen muß aber kleiner ſein, als die halbe Summe der vier Zahlen.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der erſten und der beiden folgenden Zahlen um 20 größer ſei als die vierte; die Summe der zweiten und der beiden folgenden um 30 größer als die erſte; die Summe der dritten und der beiden folgenden Zahlen um 40 größer als die zweite; die Summe der vierten und der beiden folgenden Zahlen um 50 größer als die dritte.

Man ſetze die Summe der vier Zahlen = 2x. Nun ſollen die drei erſten Zahlen um 20 größer ſein als die vierte; aber um ſo viel die drei erſten größer ſind, als die vierte Zahl, um eben ſo viel müſſen alle vier Zahlen größer ſein, als das Doppelte der vierten. Alle vier Zahlen zuſammen genommen ſind = 2x, und dieſe ſind alſo um 20 größer, als das Doppelte der vierten Zahl; daher iſt das Doppelte der vierten Zahl = 2x — 20, und die vierte Zahl ſelber = x — 10.

Aus ähnlichen Gründen aber wird die erſte Zahl $= x - 15$, die zweite $= x - 20$, die dritte $= x - 25$.

Nun ſollen alle vier Zahlen zuſammen genommen, $= 2x$ ſein, ſie ſind aber auch $= 4x - 70$, alſo iſt

$$4x - 70 = 2x, \text{ folglich } x = 35.$$

Die erſte Zahl wird alſo 20, die zweite 15, die dritte 10, die vierte 25, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe verlangt.

XXI.

Eine andere Auflöſung der vorigen Aufgabe.

Da die drei erſten Zahlen um 20 größer ſein ſollen, als die vierte, ſo ſetze man die vierte Zahl $= x$; ſo wird die Summe der drei erſten $= x + 20$ ſein.

Da die zweite nebſt den beiden folgenden um 30 größer ſein ſoll, als die erſte, ſo ſetze man die Summe der zweiten und dritten der halben Summe der Unterſchiede $20 + 30$ gleich, alſo $= 25$.

Da nun die Summe der drei erſten Zahlen $= x + 20$, die Summe der zweiten und dritten aber $= 25$ iſt, ſo wird die erſte Zahl $= x - 5$ ſein.

Die zweite Zahl nebſt den beiden folgenden ſoll um 30 größer ſein, als die erſte, die dritte aber nebſt den beiden folgenden um 40 größer, als die zweite; daher iſt die Summe der dritten und vierten Zahl 35, und die dritte Zahl wird $35 - x$.

Die Summe der zweiten und dritten Zahl war 25, die dritte Zahl aber iſt 35—x, alſo iſt die zweite Zahl $= x - 10$.

Endlich ſoll die Summe der vierten und der beiden folgenden Zahlen um 50 größer ſein, als die dritte. Die Summe der vierten und der beiden folgenden Zahlen iſt aber $3x - 15$, und die dritte Zahl $35 - x$, alſo muß $3x - 15$ um 50 größer ſein als $35 - x$, und man hat alſo die Gleichung

$$3x - 15 = 35 - x + 50, \text{ folglich } x = 25.$$

Die erſte Zahl war $= x - 5$ geſetzt, dieſe Zahl iſt alſo 20, die zweite 15, die dritte 10, die vierte 25.

XXII. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in drei andere von der Beſchaffenheit theilen, daß jede der beiden äußerſten, um die mittelſte vermehrt, zu der andern ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es werde alſo verlangt, die Zahl 100 in drei andere von der Beſchaffenheit zu theilen, daß die Summe der beiden erſten das Dreifache der dritten, und die Summe der beiden letzten das Vierfache der erſten ſei.

Man ſetze die dritte Zahl $= x$. Da nun die Summe der beiden erſten das Dreifache der dritten ſein ſoll,

ſo wird dieſe Summe 3x, alle drei Zahlen alſo = 4x ſein. Es iſt alſo

$$4x = 100, \text{ folglich } x = 25.$$

Wir haben die dritte Zahl = x geſetzt, folglich iſt die dritte Zahl = 25. Dagegen haben wir die Summe der erſten und zweiten Zahl = 3x geſetzt, und dieſe iſt daher = 75.

Da nun die Summe der zweiten und dritten Zahl das Vierfache der erſten ſein ſoll, ſo ſetze man nunmehr die erſte = x; alsdann wird die Summe der zweiten und dritten 4x, und die Summe aller drei Zahlen 5x ſein. Es iſt daher auch

$$5x = 100, \text{ folglich } x = 20.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 20, die dritte 25, und der Reſt, nämlich 55, iſt die zweite Zahl, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die größte um einen vorgeſchriebenen Theil der kleinſten größer ſei, als die mittelſte, die mittelſte dagegen um einen vorgeſchriebenen Theil der größten größer ſei, als die kleinſte, die kleinſte endlich um eine gegebene Zahl größer ſei, als ein vorgeſchriebener Theil der mittelſten Zahl.

Der Theil der größten Zahl, um welchen die mittelſte Zahl größer ſein ſoll, als die kleinſte, muß aber von der Beſchaffenheit ſein, daß, wenn man den Nenner dieſes Theiles mit dem Ueberſchuß der mittelſten Zahl über die kleinſte multiplicirt, die unbekannte Größe in dem Produkte öfter enthalten ſei, als in der mittelſten Zahl.

Auflöſung.

Es werde alſo verlangt, daß die größte Zahl um ein Drittel der kleinſten größer ſei, als die mittelſte, die mittelſte Zahl um ein Drittheil der größten größer als die kleinſte, und die kleinſte Zahl endlich um 10 größer, als ein Drittel der mittelſten.

Man ſetze die kleinſte Zahl $= x + 10$, weil ſie um 10 größer ſein ſoll, als ein Drittel der mittelſten Zahl, die mittelſte Zahl wird nun $3x$ ſein, und ſo wird die kleinſte ein Drittel der mittelſten Zahl und außerdem 10 Einheiten enthalten. Oder auch ſo: Man ſetze die mittelſte Zahl $= 3x$, und da die kleinſte um 10 größer ſein ſoll, als ein Drittel der mittelſten, ſo wird die kleinſte Zahl $= x + 10$ ſein.

Es ſoll ferner die mittelſte Zahl um ein Drittel der größten Zahl größer ſein, als die kleinſte, aber der Ueberſchuß der mittelſten Zahl über die kleinſte iſt $2x - 10$. Dies iſt alſo ein Drittel der größten Zahl, und die größte Zahl ſelber iſt $= 6x - 30$.

Nun ſoll aber auch die groͤßte Zahl um ein Drittel der kleinſten groͤßer ſein, als die mittelſte; der Ueberſchuß der groͤßten Zahl uͤber die mittelſte iſt aber $3x-30$. Dies iſt alſo ein Drittel der kleinſten Zahl, und die kleinſte Zahl iſt alſo $=9x-90$. Die kleinſte Zahl war aber auch $=x+10$, alſo iſt

$$9x-90=x+10 \text{ und } x=12\frac{1}{2}.$$

Daher iſt die groͤßte Zahl $22\frac{1}{2}$, die mittelſte $37\frac{1}{2}$, die groͤßte aber 45, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe verlangt.

XXIV.

Eine andere Aufloͤſung der naͤmlichen Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die groͤßeſte um einen vorgeſchriebenen Theil der kleinſten groͤßer ſei, als die mittelſte, die mittelſte um einen vorgeſchriebenen Theil der groͤßten groͤßer, als die kleinſte, die kleinſte endlich um eine gegebene Zahl groͤßer, als ein vorgeſchriebener Theil der mittelſten.

Der Theil der groͤßten Zahl, um welchen die mittelſte Zahl groͤßer ſein ſoll, als die kleinſte, muß aber ſo beſchaffen ſein, daß wenn man ihn zu der kleinſten Zahl addirt, die unbekannte Groͤße

in dieſer Summe nicht ſo oft vorkommt, als in dem Ausdrucke, den man Anfangs für die mittelſte Zahl ſetzt.

Auflöſung.

Man ſetze die kleinſte Zahl wieder $= x + 10$, weil ſie um 10 größer ſein ſoll, als ein Drittel der mittelſten. Nun wird die mittelſte Zahl $3x$ ſein müſſen, damit die kleinſte Zahl um 10 größer ſei, als ein Drittel der mittelſten.

Da nun die größte Zahl um den dritten Theil der kleinſten größer ſein ſoll, als die mittelſte, ſo lege man zu der mittelſten Zahl den dritten Theil der kleinſten hinzu, ſo erhält man die größte Zahl $= 3x + \frac{x+10}{3}$ oder $3\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

Ferner ſoll die mittelſte Zahl der kleinſten und einem Drittel der größten gleich ſein. Aber die kleinſte Zahl und das Drittel der größten betragen zuſammen $2\frac{1}{9}x + 11\frac{1}{9}$. Alſo iſt

$$3x = 2\frac{1}{9}x + 11\frac{1}{9}.$$

Nun ziehe man Gleiches von Gleichem ab, ſo erhält man

$$\frac{8}{9}x = 11\frac{1}{9}.$$

Man multiplicire an beiden Seiten mit 9, ſo wird

$$8x = 100 \text{ und } x = 12\frac{1}{2},$$

und die Richtigkeit der Auflöſung erhellet wie im Vorigen.

XXV. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn jede an die nächſtfolgende einen vorgeſchriebenen Theil ihres Werthes abgiebt, die Zahlen zuletzt unter einander gleich werden.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die erſte Zahl an die zweite ein Drittel, die zweite an die dritte ein Viertel, und die dritte an die erſte ein Fünftel ihres Werthes abgeben, und die Zahlen dadurch einander gleich werden ſollen.

Man drücke die erſte Zahl durch x mit einem durch 3 theilbaren Coefficienten aus, weil ſie ein Drittel ihres Werthes abgeben ſoll. Die erſte Zahl ſei alſo $= 3x$.

Die zweite Zahl ſetze man irgend einer durch 4 theilbaren Zahl gleich, da ſie ein Viertel ihres Werthes abgeben ſoll; ſie ſei alſo $= 4$.

Wenn nun die zweite Zahl empfängt und abgiebt, was die Aufgabe vorſchreibt, ſo wird ſie $= x + 3$, daher muß auch die erſte Zahl, wenn ſie das Vorgeſchriebene gegeben und empfangen hat, $= x + 3$ werden. Nachdem ſie aber $\frac{1}{3}$ ihres Werthes oder x abgegeben hat, ſo wird ſie dadurch $= x + 3$, daß ſie $3 - x$ erhält, folglich

iſt $3 - x$ der fünfte Theil der dritten Zahl, und die dritte Zahl ſelber $= 15 - 5x$.

Endlich muß auch die dritte Zahl, wenn ſie an die erſte ein Fünftel ihres Werthes abgiebt, und dagegen ein Viertel der zweiten Zahl erhält, $= x + 3$ werden. Wenn ſie aber ein Fünftel ihres Werthes oder $3 - x$ abgiebt, ſo bleibt $12 - 4x$, und wenn ſie ein Viertel von dem Werthe der zweiten Zahl, oder 1 erhält, ſo wird ſie $13 - 4x$; alſo iſt

$$13 - 4x = x + 3 \text{ und } x = 2.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 6, die zweite 4, die dritte 5, und es iſt klar, daß dieſe Zahlen der Aufgabe genügen.

XXVI. Aufgabe.

Man ſoll vier Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn jede an die nächſtfolgende einen vorgeſchriebenen Theil ihres Werthes abgiebt, die Zahlen zuletzt unter einander gleich werden.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß die erſte an die zweite ein Drittel, die zweite an die dritte ein Viertel, die dritte an die vierte ein Fünftel, die vierte an die erſte ein Sechstel ihres Werthes abgeben, und daß die

dadurch entſtehenden Zahlen einander gleich werden ſollen.

Man drücke die erſte Zahl durch x und einen durch 3 theilbaren Coefficienten aus, weil ſie ein Drittel ihres Werthes abgeben ſoll, ſie ſei alſo z. B. = 3x. Für die zweite Zahl nehme man eine durch 4 theilbare Zahl an, da ſie ein Viertel ihres Werthes abgeben ſoll, ſie ſei alſo z. B. = 4.

Wenn nun die zweite Zahl ein Viertel ihres Werthes oder 1 abgiebt, und dagegen ein Drittel der erſten oder x erhält, ſo wird ſie zuletzt = x + 3. Daher muß auch die erſte Zahl, wenn ſie ein Drittel oder x abgiebt, und ein Sechstel der vierten Zahl erhält, = x + 3 werden. Wenn ſie aber x abgiebt, ſo bleibt 2x, und dies ſoll ſich in x + 3 verwandeln, wenn noch ein Sechstel der vierten Zahl hinzukommt; das Sechstel der vierten Zahl iſt alſo 3 — x, und die vierte Zahl ſelber = 18 — 6x.

Es ſoll ferner die vierte Zahl ein Sechstel ihres Werthes abgeben, und ein Fünftel der dritten Zahl erhalten, und dadurch = x + 3 werden. Wenn ſie aber ein Sechstel ihres Werthes oder 3 — x abgiebt, ſo bleibt noch 15 — 5x. Dieſer Reſt ſoll alſo dadurch x + 3 werden, daß ein Fünftel der dritten Zahl hinzukommt; er wird aber x + 3, wenn 6x — 12 hinzukommt; alſo iſt 6x — 12 ein Fünftel der dritten Zahl, und die dritte Zahl ſelber = 30x — 60.

Endlich ſoll auch die dritte Zahl, wenn ſie ein Fünf-

tel ihres Werthes abgiebt und ein Viertel der zweiten Zahl erhält, $= x + 3$ werden. Wenn ſie aber ein Fünftel ihres Werthes oder $6x - 12$ abgiebt, ſo behält ſie $24x - 48$, und wenn ſie ein Viertel der zweiten Zahl oder 1 erhält, ſo wird ſie $24x - 47$, alſo iſt

$$24x - 47 = x + 3, \text{ folglich } x = \frac{50}{23}.$$

Die erſte Zahl wird alſo $\frac{150}{23}$, die zweite $\frac{92}{23}$, die dritte $\frac{120}{23}$, die vierte $\frac{114}{23}$. Man werfe aber den gemeinſchaftlichen Nenner weg, ſo wird die erſte Zahl 150, die zweite 92, die dritte 120, die vierte 114.

XXVII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn jede einen vorgeſchriebenen Theil von der Summe der beiden übrigen erhält, die Zahlen unter einander gleich werden.

Auflöſung.

Es ſei alſo vorgeſchrieben, daß die erſte von der Summe der beiden übrigen ein Drittel, die zweite von der Summe der beiden übrigen ein Viertel, die dritte von der Summe der beiden übrigen ein Fünftel erhalten, und daß die Zahlen dadurch einander gleich werden ſollen.

Man ſetze die erſte Zahl $= x$, für die Summe der beiden übrigen, welche ein Drittel ihres Werthes abge-

ben ſollen, nehme man der Bequemlichkeit wegen, eine beliebige, durch 3 theilbare Zahl an; dieſe Summe ſei alſo $=3$. Dann wird die Summe aller drei Zahlen $=x+3$, die erſte aber, wenn ſie ein Drittel von dem Werth der beiden übrigen erhält, wird $=x+1$; daher muß auch die zweite, wenn ſie von dem Werth der beiden übrigen ein Viertel erhält, $=x+1$ werden.

Man multiplicire alles mit 4, ſo iſt das Vierfache der zweiten Zahl und die Summe der beiden übrigen eben ſo groß, als das Dreifache der zweiten und die Summe aller drei Zahlen; alſo iſt das Dreifache der zweiten und die Summe aller drei Zahlen $=4x+4$. Zieht man hiervon die Summe der drei Zahlen oder $x+3$ ab, ſo bleibt $3x+1$, und dies iſt das Dreifache der zweiten Zahl, die zweite Zahl ſelbſt iſt alſo $x+\frac{1}{3}$.

Ferner ſoll die dritte Zahl, wenn ſie von der Summe der beiden übrigen ein Fünftel erhält, $=x+3$ werden. Man multiplicire alles mit 5, ſo erhält man durch ähnliche Schlüſſe, wie vorher, die dritte Zahl $=x+\frac{1}{2}$.

Endlich ſoll die Summe der drei Zahlen $=x+3$ ſein, dieſe Summe aber iſt auch $3x+\frac{5}{6}$, alſo wird

$$3x+\frac{5}{6}=x+3, \text{ folglich } x=\frac{13}{12}.$$

Die erſte Zahl wird alſo, wenn man den gemeinſchaftlichen Nenner wegläßt, 13, die zweite 17, die dritte 19.

XXVIII. Aufgabe.

Man ſoll vier Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn jede von der Summe der übrigen einen vorgeſchriebenen Theil erhält, die Zahlen unter einander gleich werden.

Aufloͤſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß die erſte ein Drittel, die zweite ein Viertel, die dritte ein Fünftel, die vierte ein Sechstel von der Summe der übrigen Zahlen erhalten, und dadurch alle vier Zahlen zuletzt einander gleich werden ſollen.

Man ſetze die erſte Zahl $= x$, und da die Summe der übrigen ein Drittel abgeben ſoll, ſo nehme man dafür, der Bequemlichkeit wegen, eine durch 3 theilbare Zahl an, z. B. 3. Wenn nun die erſte von der Summe der übrigen ein Drittel erhält, ſo wird ſie $= x + 1$. Daher muß die zweite, wenn ſie von der Summe der übrigen ein Viertel erhält, ebenfalls $= x + 1$ werden.

Man multiplicire, wie in der vorigen Aufgabe, alles mit 4, ſo findet man durch ein ganz ähnliches Verfahren die zweite Zahl $= x + \frac{1}{3}$, die dritte $= x + \frac{1}{2}$, die vierte $= x + \frac{3}{5}$.

Nun ſoll die Summe aller vier Zahlen $= x + 3$

ſein; die Summe der drei Zahlen iſt aber auch $4x + \frac{43}{30}$, alſo iſt

$$4x + \frac{43}{30} = x + 3 \quad \text{und} \quad x = \frac{47}{90}.$$

Die erſte Zahl wird alſo 47, die zweite 77, die dritte 92, die vierte 101, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe verlangt.

XXIX. Aufgabe.

Man ſoll zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn man die gegebenen Zahlen mit der geſuchten Zahl multiplicirt, das eine Produkt ein Quadrat, das andere aber die Wurzel dieſes Quadrates wird.

Auflöſung.

Die gegebenen Zahlen mögen 200 und 5 ſein. Die geſuchte Zahl aber ſetze man $= x$, ſo iſt das eine Produkt $200x$, das andere $5x$. Nun ſoll aber das eine Produkt, nämlich $200x$, ein Quadrat, das andere aber, nämlich $5x$, die Wurzel dieſes Quadrats ſein. Wenn ich aber $5x$ ins Quadrat erhebe, ſo erhalte ich $25x^2$, folglich iſt

$$25x^2 = 200x.$$

Man dividire an beiden Seiten durch die unbekannte Größe, ſo erhält man

$$25x = 200, \quad \text{folglich} \quad x = 8,$$

und dieſe Zahl leiſtet, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXX.

XXX. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl ihre Summe als ihr Produkt einer gegebenen Zahl gleich wird.

Die gegebenen Zahlen müſſen aber ſo beſchaffen ſein, daß ein Quadrat übrig bleibt, wenn man das Produkt der beiden Zahlen von dem Quadrat ihrer halben Summe abzieht.

Dies kann man aber durch ein beſonderes Verfahren bewirken.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der beiden Zahlen 20, ihr Produkt aber 96 ſei.

Man ſetze den Unterſchied der beiden Zahlen $= 2x$, die Summe derſelben ſoll nach der Annahme 20 ſein. Wenn ich die Summe hälfte, ſo iſt jeder Theil $= 10$, und wenn ich nun den halben Unterſchied der Zahlen, nämlich x, von der einen Hälfte ſubtrahire, und ihn zu der anderen Hälfte wieder addire, ſo wird die Summe der dadurch entſtandenen Zahlen noch immer $= 20$, und ihr Unterſchied $= 2x$ ſein.

Man ſetze alſo die größere Zahl $= 10 + x$, und die kleinere $= 10 - x$, ſo wird die Summe 20, und der Unterſchied $2x$ betragen. Nun ſoll aber auch das Produkt der beiden Zahlen 96 ſein, dies Produkt iſt aber auch $100 - x^2$, folglich wird

$$96 = 100 - x^2 \text{ und } x = 2.$$

Die größere Zahl iſt alſo 12, die kleinere 8.

XXXI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl die Summe der Zahlen, als die Summe ihrer Quadrate einer gegebenen Zahl gleich wird.

Die gegebenen Zahlen müſſen aber ſo beſchaffen ſein, daß ein Quadrat übrig bleibt, wenn man das Quadrat ihrer Summe von der doppelten Summe ihrer Quadrate abzieht. Dies kann man aber auch durch ein beſonderes Verfahren bewirken.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der Zahlen $= 20$, die Summe ihrer Quadrate $= 208$ ſei.

Man ſetze den Unterſchied der geſuchten Zahlen $= 2x$, die größere $= x + 10$, die kleinere $= 10 - x$, ſo wird ihre Summe 20, und ihr Unterſchied $2x$ ſein.

Nun ſoll die Summe ihrer Quadrate = 208 ſein, aber die Summe ihrer Quadrate iſt auch $2x^2 + 200$, daher wird

$$2x^2 + 200 = 208 \text{ und } x = 2.$$

Die größere Zahl iſt alſo 12, die kleinere 8, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXXII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl die Summe derſelben, als der Unterſchied ihrer Quadrate einer gegebenen Zahl gleich wird.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der Zahlen 20, der Unterſchied ihrer Quadrate hingegen 80 ſei.

Man ſetze den Unterſchied der beiden Zahlen $= 2x$, ſo iſt, wie vorher, die größere der Zahlen $= 10 + x$, die kleinere $= 10 - x$, und die Summe dieſer beiden Zahlen bleibt 20, und ihr Unterſchied $2x$.

Nun ſoll der Unterſchied zwiſchen den Quadraten dieſer beiden Zahlen = 80 ſein, dieſer Unterſchied iſt aber auch $= 40x$; daher iſt

$$40x = 80, \text{ folglich } x = 2.$$

XXXIII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl ihre Differenz als ihr Produkt einer gegebenen Zahl gleich wird.

Das vierfache Produkt und das Quadrat der Differenz müſſen aber, zuſammen genommen, wieder ein Quadrat geben. Dies kann man aber durch ein beſonderes Verfahren bewirken.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß die Differenz der beiden Zahlen $= 4$, das Produkt aber $= 96$ werde.

Man ſetze die Summe der Zahlen $= 2x$, und da ihre Differenz $= 4$ ſein ſoll, ſo iſt die größere $= x + 2$, und die kleinere $= x - 2$, denn dieſe beiden Zahlen geben zur Summe $2x$, und zur Differenz 4. Nun ſoll ferner das Produkt beider Zahlen 96 ſein, dies Produkt iſt aber auch $= x^2 - 4$, folglich iſt

$$x^2 - 4 = 96, \text{ alſo } x = 10.$$

Die größere Zahl iſt alſo wieder 12, die kleinere 8, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe verlangt.

XXXIV. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Zahlen unter ſich in einem

gegebenen Verhältniß ſtehen, und außerdem die Summe ihrer Quadrate zu der Summe der Zahlen ſelbſt ein gegebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und die Summe ihrer Quadrate das Fünffache von der Summe der Zahlen ſein.

Man ſetze die kleinere Zahl $=x$, ſo wird die größere $=3x$ ſein. Nun ſoll aber auch die Summe ihrer Quadrate das Fünffache von der Summe der Zahlen ſein. Die Summe der Quadrate iſt aber $=10x^2$, und die Summe der Zahlen ſelber $=4x$, daher iſt $10x^2$ das Fünffache von $4x$, oder es iſt

$$10x^2 = 20x \text{ und } x = 2.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 2, und die größere 6.

XXXV. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Zahlen unter ſich in einem gegebenen Verhältniß ſtehen, und außerdem die Summe ihrer Quadrate zu der Differenz dieſer Zahlen ein gegebenes Verhältniß habe.

Aufloͤſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die groͤßere Zahl das Dreifache der kleineren, und die Summe ihrer Quadrate das Zehnfache von der Differenz beider Zahlen ſei.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, ſo iſt die groͤßere $= 3x$. Außerdem ſoll die Summe ihrer Quadrate das Zehnfache von der Differenz dieſer Zahlen ſein. Die Summe der Quadrate iſt aber $10x^2$, und die Differenz der Zahlen ſelber iſt $2x$. Daher iſt $10x^2$ das Zehnfache von $2x$, aber $20x$ iſt auch das Zehnfache von $2x$, daher iſt

$$10x^2 = 20x,$$

Man dividire an beiden Seiten durch x, ſo wird

$$10x = 20, \text{ und } x = 2.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo wie in der vorigen Aufgabe 2, die groͤßere 6, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXXVI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Zahlen ſelbſt in einem vorgeſchriebenen Verhaͤltniß ſtehen, und außerdem der Unterſchied ihrer Quadrate zu der Summe der Zahlen ein vorgeſchriebenes Verhaͤltniß habe.

Aufloͤſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die groͤßere Zahl das Dreifache der kleineren, und der Unterſchied ihrer Quadrate das Sechsfache von der Summe der Zahlen ſei.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, ſo iſt die groͤßere $= 3x$. Außerdem ſoll der Unterſchied der Quadrate das Sechsfache von der Summe der Zahlen ſein. Aber der Unterſchied der Quadrate iſt $8x^2$, und die Summe der Zahlen $4x$. Folglich iſt $8x^2$ das Sechsfache von $4x$, oder es iſt

$$8x^2 = 24x \text{ und } x = 3.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 3, und die groͤßere 9.

XXXVII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Zahlen unter ſich in einem gegebenen Verhaͤltniß ſtehen, und außerdem der Unterſchied ihrer Quadrate zu dem Unterſchied der Zahlen ſelbſt ein vorgeſchriebenes Verhaͤltniß habe.

Aufloͤſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die groͤßere Zahl das Dreifache der kleineren, und der Unterſchied ihrer Quadrate das Zwoͤlffache von dem Unterſchiede der Zahlen ſei.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, ſo iſt die größere $= 3x$. Außerdem aber ſoll der Unterſchied ihrer Quadrate das Zwölffache von dem Unterſchiede der Zahlen ſelber ſein. Der Unterſchied der Quadrate iſt aber $8x^2$, und der Unterſchied der Zahlen $2x$. Daher iſt $8x^2$ das Zwölffache von $2x$, oder

$$8x^2 = 24x \text{ und } x = 3.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo, wie in der vorigen Aufgabe 3, die größere 9, und der Beweis fällt in die Augen.

Zuſatz.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man auch zwei Zahlen, die unter ſich ein gegebenes Verhältniß haben, und deren Produkt entweder zu ihrer Summe, oder zu ihrem Unterſchiede ein gegebenes Verhältniß hat.

XXXVIII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Zahlen unter ſich in einem vorgeſchriebenen Verhältniß ſtehen, und außerdem das Quadrat der kleineren zu der größeren Zahl ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Aufloſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren Zahl das Sechsfache der größeren ſein ſolle.

Man ſetze die kleinere Zahl = x, ſo iſt die größere = 3x. Außerdem ſoll das Quadrat der kleineren Zahl das Sechsfache der größeren Zahl ſein. Das Quadrat der kleineren Zahl iſt aber x^2, und dies ſoll das Sechsfache von 3x ſein. Daher iſt

$$x^2 = 18x \text{ und } x = 18.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 18, die größere 54.

XXXIX. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Zahlen unter ſich, und außerdem das Quadrat der kleineren zu der kleineren Zahl ſelbſt, ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren das Sechsfache eben dieſer Zahl ſei.

Man ſetze die kleinere Zahl = x, ſo iſt die größere = 3x. Nun ſoll das Quadrat der kleineren Zahl das Sechsfache von eben dieſer Zahl ſein. Daher iſt x^2 das Sechsfache von x, oder es iſt

$$x^2 = 6x, \text{ folglich } x = 6.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 6, die größere 18.

XL. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Zahlen unter ſich, und außerdem das Quadrat der kleineren Zahl zu der Summe von beiden, ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren Zahl das Doppelte von der Summe beider Zahlen ſei.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 3x$. Nun ſoll das Quadrat der kleineren das Doppelte von der Summe beider Zahlen ſein. Aber das Quadrat der kleineren Zahl iſt x^2, und die Summe beider Zahlen iſt $4x$, daher iſt x^2 das Doppelte von $4x$, oder

$$x^2 = 8x, \text{ folglich } x = 8.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 8, die größere 24, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe verlangt.

XLI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Zahlen unter ſich, und außerdem das Quadrat der kleineren zu dem Unter-

ſchiede der beiden Zahlen, ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und außerdem das Quadrat der kleineren das Sechsfache von dem Unterſchiede der Zahlen ſei.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 3x$. Nun ſoll das Quadrat der kleineren das Sechsfache von dem Unterſchiede beider Zahlen ſein, alſo iſt x^2 das Sechsfache von $2x$, oder

$$x^2 = 12x, \text{ folglich } x = 12,$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 12, die größere 36, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe verlangt.

XLII. Zuſatz.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man auch zwei Zahlen, welche unter ſich in einem vorgeſchriebenen Verhältniſſe ſtehen, und außerdem die Eigenſchaft haben, daß das Quadrat der größeren, entweder zu der kleineren, oder zu der größeren Zahl, oder auch zu der Summe von beiden, ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

XLIII. Aufgabe.

Man ſoll zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn man die Summe von je zweien mit der dritten Zahl multiplicirt, die Produkte, der Reihe nach, gleiche Unterſchiede haben.

Auflöſung.

Es ſind z. B. die Zahlen 3 und 5 gegeben, zu dieſen ſoll man eine dritte Zahl von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn man die Summe von je zweien mit der dritten multiplicirt, die Produkte der Reihe nach gleiche Unterſchiede haben.

Man ſetze die geſuchte Zahl $= x$. Addirt man dieſe zu der gegebenen Zahl 5, ſo erhält man $x + 5$, und multiplicirt man dies mit der anderen gegebenen Zahl oder mit 3, ſo wird das Produkt $3x + 15$.

Addirt man aber x zu 3, ſo erhält man $x + 3$, und multiplicirt man dies mit 5, ſo erhält man $5x + 15$.

Addirt man endlich 3 und 5, ſo erhält man 8, und multiplicirt man dieſe Summe mit x, ſo erhält man $8x$.

Nun iſt klar, daß $3x + 15$ nicht das größeſte der drei Produkte ſein kann, denn $5x + 15$ iſt ohne Zweifel größer. Daher iſt $3x + 15$, entweder das kleinſte, oder

das mittelſte der drei Produkte; $5x+15$ iſt entweder das größeſte oder das mittelſte; aber $8x$ kann das größeſte, das mittelſte und das kleinſte der drei Produkte ſein, weil der Werth von x noch nicht bekannt iſt.

Man nehme zuerſt an, daß $5x+15$ das größeſte, $3x+15$ das kleinſte, folglich $8x$ das mittelſte der drei Produkte ſei. Wenn nun die drei Zahlen gleiche Unterſchiede haben (oder eine arithmetiſche Reihe bilden), ſo iſt die Summe der größten und der kleinſten das Doppelte der mittelſten, die Summe der größten und kleinſten iſt aber $8x+30$, folglich iſt

$$8x+30=16x \text{ und } x=\frac{15}{4}.$$

Die geſuchte Zahl iſt in dieſem Falle alſo $\frac{15}{4}$, und leiſtet wirklich, was die Aufgabe verlangt.

Nunmehr ſei $5x+15$ das größte, $3x+15$ das mittelſte, folglich $8x$ das kleinſte der drei Produkte. Wenn aber drei Zahlen der Reihe nach gleiche Unterſchiede haben, ſo iſt der Unterſchied der größten und mittelſten dem Unterſchiede der mittelſten und der kleinſten gleich. Der Unterſchied der größten und mittelſten Zahl iſt in unſerem Falle $2x$, der Unterſchied der mittelſten und der kleinſten iſt $15-5x$, alſo iſt

$$2x=15-5x, \text{ folglich } x=\frac{15}{7}.$$

Die geſuchte Zahl iſt alſo in dieſem Falle $\frac{15}{7}$, und dieſe Zahl leiſtet, was die Aufgabe verlangt.

Endlich ſei $8x$ das größte, $5x + 15$ das mittelſte, $3x + 15$ das kleinſte der drei Produkte. Nun iſt wieder die Summe der größten und der kleinſten Zahl dem Doppelten der mittelſten Zahl gleich. Aber die Summe der kleinſten und größten Zahl iſt $11x + 15$, und dies iſt das Doppelte der mittelſten Zahl, oder das Doppelte von $5x + 15$. Daher iſt

$$11x + 15 = 10x + 30, \text{ und } x = 15.$$

Die geſuchte Zahl iſt in dieſem Falle alſo 15, und dieſe Zahl leiſtet, was die Aufgabe vorſchreibt.

Zweites Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe derſelben zu der Summe ihrer Quadrate ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der Zahlen ein Zehntel von der Summe ihrer Quadrate ſei.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, und die größere $= 2x$, ſo iſt die Summe der Zahlen $= 3x$, und die Summe ihrer Quadrate $= 5x^2$. Nun ſoll $3x$ ein Zehntel von $5x^2$ ſein, folglich iſt

$$5x^2 = 30x \text{ und } x = 6.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 6, und die größere 12.

II. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied derſelben zu dem Unterſchied ihrer Quadrate ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß der Unterſchied der Zahlen ein Sechstel von dem Unterſchiede ihrer Quadrate ſein ſolle.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 2x$, ſo iſt der Unterſchied der Zahlen ebenfalls $= x$, und der Unterſchied ihrer Quadrate $= 3x^2$. Nun ſoll aber x ein Sechstel von $3x^2$ ſein, folglich iſt

$$3x^2 = 6x \text{ und } x = 2.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 2, und die größere 4.

III. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt derſelben zu ihrer Summe, oder zu ihrem Unterſchiede ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auf-

Aufløſung.

Es ſei zuerſt vorgeſchrieben, daß das Produkt der geſuchten Zahlen das Sechsfache von ihrer Summe ſein ſolle.

Man ſetze die kleinere Zahl $=x$, die größere $=2x$, auch kann man die Zahlen ſo ausdrücken, daß ſie jedes vorgeſchriebene Verhältniß haben. Das Produkt der beiden Zahlen wird alſo $2x^2$, ihre Summe dagegen $3x$ ſein. Da nun $2x^2$ das Sechsfache von $3x$ ſein ſoll, ſo hat man die Gleichung

$$2x^2 = 18x, \text{ und } x = 9.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 9, die größere 18.

Wäre aber vorgeſchrieben, daß das Produkt beider Zahlen das Sechsfache ihres Unterſchiedes ſein ſolle, ſo wäre das Produkt der Zahlen wieder $= 2x^2$, der Unterſchied der Zahlen $= x$, folglich wäre

$$2x^2 = 6x, \text{ und } x = 3.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 3, die größere 6.

IV. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe ihrer Quadrate zu dem Unterſchiede der Zahlen ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß die Summe der Quadrate das Zehnfache von dem Unterſchiede der Zahlen ſein ſolle.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 2x$, ſo iſt die Summe ihrer Quadrate $= 5x^2$, ihr Unterſchied aber iſt ebenfalls $= x$. Nun ſoll $5x^2$ das Zehnfache von x ſein, folglich iſt

$$5x^2 = 10x, \text{ und } x = 2.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 2, die größere 4, und dieſe Zahlen leiſten der Aufgabe Genüge.

V. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied ihrer Quadrate zu der Summe der Zahlen ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß der Unterſchied der Quadrate das Sechsfache von der Summe der Zahlen ſei.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 2x$, ſo iſt der Unterſchied ihrer Quadrate $= 3x^2$, und die

Summe der Zahlen $=3x$. Nun ſoll $3x^2$ das Sechsfache von $3x$ ſein, daher iſt

$$3x^2 = 18x, \text{ und } x = 6.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 6, die größere 12, und der Beweis fällt in die Augen.

VI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Zahlen ſelbſt einen vorgeſchriebenen Unterſchied haben, und der Unterſchied ihrer Quadrate um eine beſtimmte Zahl größer ſei, als der Unterſchied der Zahlen ſelber.

Es muß aber das Quadrat des Unterſchiedes der Zahlen kleiner ſein, als die Summe dieſes Unterſchiedes und derjenigen Zahl, um welche der Unterſchied der Quadrate größer ſein ſoll, als der Unterſchied der Zahlen.

Auflöſung.

Es werde alſo verlangt, daß der Unterſchied der Zahlen $=2$, der Unterſchied ihrer Quadrate aber um 20 größer ſein ſolle.

Man ſetze die kleinere Zahl $=x$, ſo iſt die größere $=x+2$, und der Unterſchied ihrer Quadrate $=4x+4$.

Dieſer Unterſchied ſoll nun um 20 größer ſein als 2, daher iſt

$$4x + 4 = 22, \text{ und } x = 4\frac{1}{2}.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo $4\frac{1}{2}$, die größere $6\frac{1}{2}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

VII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied ihrer Quadrate um eine gegebene Zahl größer ſei, als ein vorgeſchriebenes Vielfaches von dem Unterſchiede der Zahlen.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß der Unterſchied der Quadrate um 10 größer ſei, als der dreifache Unterſchied der Zahlen ſelbſt. Das Quadrat des Unterſchiedes muß aber kleiner ſein, als die Summe der Zahl 10 und des dreifachen Unterſchiedes der Zahlen.

Man ſetze den Unterſchied der Zahlen $= 2$, und die kleinere Zahl $= x$, ſo wird die größere $= x + 2$ ſein. Nun ſoll der Unterſchied der Quadrate d. i. $4x + 4$ um 10 größer ſein, als der dreifache Unterſchied der Zahlen ſelber. Man hat alſo die Gleichung

$$4x + 4 = 3 \cdot 2 + 10, \text{ und } x = 3.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo 3, die größere 5, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe verlangt.

VIII. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Quadratzahl in zwei andere Quadratzahlen theilen.

Auflöſung.

Man ſoll z. B. 16 in zwei Quadratzahlen theilen.

Man ſetze die eine der geſuchten Zahlen $= x^2$, ſo ſoll auch $16 - x^2$ eine Quadratzahl ſein. Als Wurzel dieſer Quadratzahl ſehe man irgend ein Vielfaches von x, weniger der Wurzel des gegebenen Quadrates an, z. B. $2x - 4$. Davon iſt das Quadrat $4x^2 - 16x + 16$, und nun ſetze man

$$4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$5x^2 = 16x, \text{ und } x = \frac{16}{5}.$$

Die eine Zahl iſt alſo $\frac{256}{25}$, und die andre $\frac{144}{25}$. Die Summe beider iſt $\frac{400}{25}$, oder 16, und beide ſind, wie verlangt wurde, Quadratzahlen.

IX.

Eine andere Auflöſung der vorigen Aufgabe.

Es ſei wieder 16 in zwei Quadratzahlen zu theilen.

Man ſetze die Wurzel des einen Quadrates $= x$, für die Wurzel des anderen Quadrats nehme man ein beliebiges Vielfaches von x, ziehe aber die Wurzel des gegebenen Quadrats davon ab, dieſe Wurzel ſei alſo $2x-4$. Die beiden Quadrate ſind alſo x^2, und $4x^2-16x+16$, und beide zuſammen ſollen 16 zur Summe geben; es iſt alſo

$$5x^2-16x+16=16, \text{ und } x=\frac{16}{5}.$$

Die Wurzel des erſten Quadrats iſt alſo $\frac{16}{5}$, das Quadrat ſelbſt $\frac{256}{25}$, die Wurzel des andern Quadrats iſt $\frac{12}{5}$, und das Quadrat ſelbſt $\frac{144}{25}$. Der Beweis fällt in die Augen.

X. Aufgabe.

Man ſoll eine Zahl, welche ſchon an ſich die Summe von zwei Quadraten iſt, noch in zwei andere Quadrate theilen.

Aufloͤſung.

Man ſoll z. B. die Zahl 13, welche die Summe der Quadrate 4 und 9 iſt, in zwei andere Quadrate theilen.

Man nehme die Wurzeln der beiden Quadrate 4 und 9, aus welchen die gegebene Zahl beſteht, alſo in unſerem Falle die Zahlen 2 und 3. Nun ſetze man die Wurzel des einen geſuchten Quadrats $= x + 2$, fuͤr die Wurzel des anderen Quadrats nehme man ein Vielfaches von x, und ziehe davon die Wurzel des andern Quadrats, naͤmlich 3, ab, dieſe Wurzel ſei alſo $2x - 3$. Die verlangten Quadrate ſind alſo $x^2 + 4x + 4$, und $4x^2 - 12x + 9$, und beide zuſammen ſollen $= 13$ ſein. Man hat alſo die Gleichung

$$5x^2 - 8x + 13 = 13, \text{ und } x = \frac{8}{5}.$$

Die Wurzel des erſten Quadrats haben wir $= x + 2$ geſetzt, dieſe iſt alſo $\frac{18}{5}$; die Wurzel des zweiten Quadrats haben wir $= 2x - 3$ geſetzt, dieſe Wurzel wird alſo $\frac{1}{5}$. Das erſte Quadrat iſt alſo $\frac{324}{25}$, das zweite $\frac{1}{25}$. Die Summe von beiden iſt aber $\frac{325}{25}$, oder 13.

XI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Quadrate ſuchen, deren Unterſchied einer vorgeſchriebenen Zahl gleich iſt.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß der Unterſchied der Quadrate 60 ſein ſolle.

Man ſetze die Wurzel des einen Quadrats $= x$, die Wurzel des andern $= x +$ einer beliebigen Zahl, deren Quadrat aber nicht größer, als der gegebene Unterſchied 60 ſein darf, denn ſo wird man eine Gleichung zwiſchen zwei einfachen Ausdrücken erhalten.

Die Wurzel des zweiten Quadrats ſei alſo $x+3$, folglich iſt das eine Quadrat $= x^2$, das andere $= x^2+6x+9$, und der Unterſchied beider Quadrate $= 6x+9$. Man hat alſo die Gleichung

$$6x+9=60, \text{ und } x = 8\frac{1}{2}.$$

Die Wurzel des kleineren Quadrats iſt alſo $8\frac{1}{2}$, die Wurzel des größeren $11\frac{1}{2}$, die Quadrate ſelbſt aber ſind $72\frac{1}{4}$ und $132\frac{1}{4}$, und es fällt in die Augen, daß dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XII. Aufgabe.

Man ſoll zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte von der Beſchaffenheit addiren, daß beide Summen Quadrate werden.

Aufloͤſung.

Die gegebene Zahlen moͤgen 2 und 3 ſein.

Man ſetze die Zahl, die man zu beiden addiren muß, $= x$, ſo ſoll ſowohl $x + 2$, als $x + 3$ ein Quadrat ſein. Dieſen Fall nennt man aber die doppelte Gleichung, und man loͤſet dieſelbe auf folgende Art:

> Man nimmt den Unterſchied der beiden Quadrate, und zerfaͤllt dieſelben in zwei Factoren, z. B. hier in 4 und $\frac{1}{4}$. Der halbe Unterſchied dieſer Factoren, ins Quadrat erhoben, giebt das kleinere, die halbe Summe ins Quadrat erhoben, giebt das groͤßere der beiden Quadrate.

In unſerem Falle iſt das Quadrat des halben Unterſchiedes der Factoren $= \frac{225}{64}$, und dies iſt dem kleineren Quadrat gleich, folglich iſt

$$x + 2 = \frac{225}{64}, \text{ und } x = \frac{97}{64}.$$

Das Quadrat der halben Summe iſt aber $\frac{289}{64}$, und dies iſt gleich dem groͤßeren Quadrat, folglich iſt

$$x + 3 = \frac{289}{64}, \text{ und } x = \frac{97}{64}.$$

Die Zahl, welche man zu beiden gegebenen Zahlen addiren muß, iſt alſo $\frac{97}{64}$, und dieſe Zahl leiſtet offenbar, was die Aufgabe vorſchreibt.

Wenn man aber nicht die doppelte Gleichung gebrauchen will, ſo muß man ſo verfahren. Man ſoll zu 2 und zu 3 einerlei Zahl addiren, und beide Summen ſollen Quadrate ſein.

Ich ſuche zuerſt eine Zahl, welche um 2 oder um 3 vermehrt, ein Quadrat wird. Dieſe Eigenſchaft hat aber jedes Quadrat, wenn ich 2 oder 3 davon abziehe. Man nehme z. B. $x^2 - 2$, ſo iſt klar, daß, wenn man 2 dazu addirt, die Summe ein Quadrat wird; wenn man aber 3 addirt, ſo erhält man $x^2 + 1$, und dies ſoll auch ein Quadrat ſein.

Ich bilde alſo ein Quadrat von x weniger ſo viel Einheiten, daß aus dem allgemeinen Ausdruck für das Quadrat der Werth von x^2 größer wird, als die vorhin abgezogenen Einheiten, hier alſo größer als 2, denn auf dieſe Weiſe erhält man eine Gleichung zwiſchen zwei einfachen Ausdrücken.

Ich bilde alſo ein Quadrat von $x - 4$, ſo wird das Quadrat $x^2 - 8x + 16$, und ich nehme an, dies ſei $= x^2 + 1$. Nun addire ich an beiden Seiten die fehlende Größe, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$8x = 15, \text{ und } x = \frac{15}{8}.$$

Die Zahl, welche man addiren muß, oder $x^2 - 2$ wird alſo auch auf dieſem Wege $= \frac{97}{64}$.

XIII. Aufgabe.

Man ſoll von zwei gegebenen Zahlen eine und dieſelbe Zahl abziehen, und beide Reſte ſollen Quadrate werden.

Auflöſung.

Man ſoll z. B. von 9 und von 21 eine und dieſelbe Zahl abziehen, und beide Reſte ſollen Quadrate werden.

Ich ziehe von einer der gegebenen Zahlen ein beliebiges Quadrat ab, und den Reſt ſehe ich als die geſuchte Zahl an, denn, wenn ich dieſen Reſt von der gegebenen Zahl abziehe, ſo bleibt gewiß ein Quadrat übrig. Ich ziehe z. B. x^2 von 9 ab, ſo wird der Reſt $9-x^2$, [und wenn ich $9-x^2$ für die geſuchte Zahl annehme, ſo fällt in die Augen, daß 9 weniger $9-x^2$ wieder ein Quadrat zum Reſte giebt.]

Wenn ich aber $9-x^2$ von 21 abziehe, ſo ſoll der Reſt ebenfalls ein Quadrat ſein, dieſer Reſt iſt aber x^2+12, und x ſoll ſo beſtimmt werden, daß auch x^2+12 ein Quadrat werde.

Zu dieſem Ende mache ich das Quadrat von x weniger ſo vielen Einheiten, daß ihr Quadrat größer, als 12 wird, denn ſo erhält man zulezt wieder eine Glei-

chung zwiſchen zwei einfachen Ausdrücken. Ich mache alſo das Quadrat von $x-4$, ſo wird

$$x^2-8x+16=x^2+12.$$

Man ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$8x=4, \text{ und } x=\frac{4}{8}.$$

Die Zahl 9 iſt $=\frac{72}{8}$ oder $\frac{576}{64}$; zieht man davon $x^2=\frac{16}{64}$ ab, ſo iſt der Reſt $\frac{560}{64}$ die geſuchte Zahl, und dieſer Reſt leiſtet was die Aufgabe verlangt.

XIV. Aufgabe.

Man ſoll zwei gegebene Zahlen von einer und derſelben Zahl abziehen, und beide Reſte ſollen Quadrate ſein.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß man von einer gewiſſen Zahl das eine Mal 6, und das andere Mal 7 abziehen, und daß beide Reſte Quadrate ſein ſollen.

Man ſetze die geſuchte Zahl $=x$. Ziehe ich davon 6 ab, ſo bleibt $x-6$, ziehe ich aber 7 davon ab, ſo bleibt $x-7$, und beide Reſte ſollen Quadrate ſein.

Hier hat man aber wieder den Fall der doppelten Gleichung, und da der Unterſchied der gegebenen Zahlen

oder 1 ein Produkt von 2 und $\frac{1}{2}$ iſt, ſo wird $x = \frac{121}{16}$, und dieſe Zahl leiſtet, was die Aufgabe verlangt.

Wenn man aber nicht die doppelte Gleichung gebrauchen will, ſo muß man die Zahl auf folgende Art ſuchen. Wir ſuchen zuerſt eine Zahl, welche um 6 vermindert, ein Quadrat giebt. Dieſe Eigenſchaft hat aber jedes Quadrat, wenn man noch 6 zu demſelben hinzulegt. Die geſuchte Zahl ſei alſo $x^2 + 6$, und wenn man von dieſer Zahl 6 abzieht, ſo fällt es in die Augen, daß der Reſt ein Quadrat iſt.

Nun ſoll man aber auch 7 von der geſuchten Zahl $x^2 + 6$ abziehen, und der Reſt $x^2 - 1$ ſoll ebenfalls ein Quadrat ſein. Als Wurzel deſſelben betrachte ich $x - 2$, ſo wird

$$x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ und } x = \frac{5}{4}.$$

Die geſuchte Zahl iſt alſo wieder $\frac{121}{16}$, und dieſe Zahl leiſtet, was die Aufgabe vorſchreibt.

XV. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und dazu ein Quadrat von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe dieſes Quadrats und jedwedes Stückes wieder ein Quadrat wird.

Auflöſung.

Wenn 20 die gegebene Zahl iſt, ſo nehme man zwei Zahlen, deren Quadrate zuſammen genommen kleiner als 20 ſind, z. B. 2 und 3. Legt man zu jeder von beiden Zahlen x hinzu, ſo iſt $(x+2)^2 = x^2+4x+4$, und $(x+3)^2 = x^2+6x+9$.

Ziehe ich von dieſen beiden Ausdrücken x^2 ab, welches gewiß ein Quadrat iſt, ſo habe ich die beiden geſuchten Stücke, denn wenn ich zu den Reſten wieder x^2 hinzulege, ſo erhalte ich gewiß zwei Quadrate.

Die Reſte ſind aber $4x+4$, und $6x+9$, und die Summe derſelben ſoll $= 20$ ſein. Es iſt alſo

$$10x+13 = 20, \text{ und } x = \frac{7}{10}.$$

Das eine Stück iſt alſo $\frac{68}{10}$, das zweite $\frac{132}{10}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XVI. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und ein Quadrat von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied dieſes Quadrats und jedwedes Stückes wieder ein Quadrat wird.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei wiederum 20. Als Wurzel des geſuchten Quadrats nehme man $x+$ einer Anzahl von Einheiten, deren Quadrat kleiner als 20 iſt, dieſe Wurzel ſei z. B. $x+2$, und das Quadrat alſo x^2+4x+4. Wenn ich hiervon $4x+4$ abziehe, ſo iſt klar, daß der Reſt ein Quadrat ſei. Wenn ich aber $2x+3$ abziehe, ſo bleibt ebenfalls ein Quadrat übrig, nämlich x^2+2x+1.

Daher ſetze ich das eine Stück $=4x+4$, das andere Stück $=2x+3$, und das geſuchte Quadrat $=x^2+4x+4$, denn nun wird der Reſt in jedem Falle ein Quadrat, ich mag das eine oder das andere Stück davon abziehen.

Nun muß die Summe beider Stücke der gegebenen Zahl gleich ſein, die Summe beider Stücke iſt aber $6x+7$, folglich iſt

$$6x+7=20.$$

Man ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$x=\frac{13}{6}.$$

Das erſte Stück wird alſo $\frac{76}{6}$, das zweite $\frac{44}{6}$, und das geſuchte Quadrat $\frac{625}{36}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XVII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen ſuchen, welche ein vorgeſchriebenes Verhältniß haben, und zu einem gegebenen Quadrat addirt, wieder ein Quadrat zur Summe geben.

Auflöſung.

Es ſei alſo vorgeſchrieben, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren ſein, und daß beide ein Quadrat geben ſollen, wenn man die Quadratzahl 9 dazu addirt.

Wenn ich von irgend einem Quadrat, deſſen Wurzel aus x mit einem beliebigen Coefficienten und aus 3 Einheiten beſteht, die Zahl 9 abziehe, ſo wird der Reſt die eine der geſuchten Zahlen ſein. Die kleinere Zahl ſei alſo x^2+6x, folglich die größere $3x^2+18x$. Dieſe Zahl ſoll nun auch ein Quadrat werden, wenn ich 9 dazu addire. Die Summe iſt aber $3x^2+18x+9$, und dieſe ſoll ein Quadrat ſein.

Ich ſetze die Wurzel dieſes Quadrats $=2x-3$, ſo wird $x=30$. Die kleinere Zahl iſt alſo 1080, die größere 3240, und wenn man zu beiden 9 addirt, ſo leiſten ſie, was die Aufgabe vorſchreibt.

XVIII.

XVIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſie unter einander gleich werden, wenn jede an die folgende einen vorgeſchriebenen aliquoten Theil, und außerdem eine vorgeſchriebene Zahl abgiebt.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß die erſte an die zweite ein Fünftel ihres Werthes und außerdem 6, die zweite an die dritte ein Sechstel ihres Werthes und außerdem 7, die dritte an die erſte ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 abgeben ſolle.

Man ſetze die erſte Zahl $=5x$, und die zweite $=6x$. Wenn nun die zweite von der erſten $x+6$ erhält, ſo wird ſie $=7x+6$, und wenn ſie an die dritte ein Sechstel ihres urſprünglichen Werthes, nämlich x, und außerdem 7 abgiebt, ſo wird ſie $=6x-1$.

Nun müſſen alſo die übrigen Zahlen, wenn ſie das Vorgeſchriebene erhalten und abgegeben haben, gleichfalls $=6x-1$ werden. Wenn aber die erſte ein Fünftel ihres Werthes und außerdem 6 abgiebt, ſo bleibt $4x-6$. Sie ſoll aber dadurch $6x-1$ werden, daß ſie von der dritten ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 erhält. Aber aus $4x-6$ wird $6x-1$, wenn $2x+5$ hin-

zukommt. Daher iſt $2x+5$ um 8 größer, als der ſiebente Theil der dritten Zahl. Ziehe ich alſo 8 von $2x+5$ ab, ſo iſt der Reſt $2x-3$ der ſiebente Theil der dritten Zahl, und die dritte Zahl ſelber iſt $= 14x-21$.

Wenn endlich dieſe dritte Zahl von der zweiten ein Sechstel ihres Werthes und außerdem 7 erhält, und an die erſte ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 abgiebt, ſo ſoll ſie auch $= 6x-1$ werden. Wenn ſie aber ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 abgiebt, ſo bleibt $12x-26$, und wenn ſie ein Sechstel der zweiten Zahl $+ 7$ erhält, ſo wird ſie $13x-19$. Alſo iſt

$$13x-19 = 6x-1, \text{ folglich } x = \frac{18}{7}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{90}{7}$, die zweite $\frac{108}{7}$, die dritte $\frac{105}{7}$.

XIX. Aufgabe.

* **Man ſoll eine gegebene Zahl in drei Zahlen von der Beſchaffenheit theilen, daß ſie unter einander gleich werden, wenn jede an die nächſtfolgende einen vorgeſchriebenen Theil ihres Werthes und außerdem eine vorgeſchriebene Zahl abgiebt.**

Auflöſung.

Man ſoll z. B. die Zahl 80 in drei andere Zahlen theilen, und von dieſen ſoll die erſte an die zweite ein

Fünftel ihres Werthes und außerdem 6, die zweite an die dritte ein Sechstel ihres Werthes und außerdem 7, die dritte an die erſte ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 abgeben, und dadurch ſollen alle drei Zahlen unter einander gleich werden. *

Man ſetze die erſte Zahl $=5x$, die zweite $=12$. Wenn nun die zweite Zahl von der erſten ein Fünftel und außerdem 6 erhält, ſo wird ſie $=x+18$; wenn ſie aber ein Sechstel ihres anfänglichen Werthes und außerdem 7 an die dritte abgiebt, ſo wird ſie $=x+9$; daher müſſen die beiden übrigen Zahlen, wenn ſie das Vorgeſchriebene gegeben und empfangen haben, ebenfalls $=x+9$ werden.

Wenn aber die erſte Zahl ein Fünftel ihres Werthes und außerdem 6 abgiebt, ſo bleibt $4x-6$. Sie ſoll nun dadurch $=x+9$ werden, daß ſie ein Siebentel der dritten Zahl und außerdem 8 erhält, ſie wird aber dadurch $x+9$, daß ſie $15-3x$ erhält. Daher iſt $15-3x$ um 8 größer als der ſiebente Theil der dritten Zahl, und wenn ich 8 von $15-3x$ abziehe, ſo iſt der Reſt oder $7-3x$ der ſiebente Theil der dritten Zahl, und die dritte Zahl ſelbſt $=49-21x$.

Nun ſoll auch dieſe dritte Zahl, wenn ſie von der mittelſten ein Sechstel ihres urſprünglichen Werthes und außerdem 6 erhält, und dagegen an die erſte ein Siebentel ihres eigenen Werthes und außerdem 8 abgiebt, $=x+9$ werden. Wenn ſie aber das Vorgeſchriebene

abgegeben und erhalten hat, ſo wird ſie $= 43 - 18x$. Daher iſt

$$x + 9 = 43 - 18x, \text{ und } x = \frac{34}{19}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{170}{19}$, die zweite $\frac{228}{19}$, die dritte $\frac{217}{19}$.

XX. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadrate von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied des größten und mittelſten zu dem Unterſchiede des mittelſten und des kleinſten ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß der erſte Unterſchied das Dreifache des zweiten Unterſchiedes ſein ſolle.

Man ſetze das kleinſte der drei Quadrate $= x^2$, das zweite $= x^2 + 2x + 1$, von der Wurzel $x + 1$, ſo wird das dritte $= x^2 + 8x + 4$ ſein.

Damit nun $= x^2 + 8x + 4$ ein Quadrat werde, ſo mache ich das Quadrat von x (damit ich x^2 erhalte) und von ſo vielen Einheiten, daß die übrigen Theile dieſes Quadrats, nämlich das doppelte Produkt und die Einheiten nicht beide zugleich größer werden, als $8x$ und 4, ſondern daß das eine größer, und das andere kleiner wird, [als das entſprechende Stück in der gegebenen Formel].

Ich mache alſo das Quadrat von $x+3$; das Quadrat ſelbſt iſt alſo x^2+6x+9, und nun ſetze ich

$$x^2+8x+4=x^2+6x+9,$$

ſo wird $x=2\frac{1}{2}$. Das gröſste Quadrat wird alſo $30\frac{1}{4}$, das mittelſte $12\frac{1}{4}$, das kleinſte $6\frac{1}{4}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat einer jeden, wenn man die andere Zahl dazu addirt, wieder ein Quadrat zur Summe giebt.

Auflöſung.

Man ſetze die erſte Zahl $=x$, die zweite $=2x+1$, damit das Quadrat der erſten Zahl und die zweite gewiß ein Quadrat zu ihrer Summe geben.

Nun ſoll aber auch das Quadrat der zweiten und die erſte Zahl ein Quadrat zur Summe geben. Das Quadrat der zweiten Zahl und die erſte Zahl geben aber zur Summe $4x^2+5x+1$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Ich mache das Quadrat von $2x-2$, ſo wird

$$4x^2+5x+1=4x^2-8x+4,$$

alſo $x=\frac{3}{13}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{3}{13}$, die zweite $\frac{19}{13}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat einer jeden, wenn man die andere Zahl davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reſte läßt.

Auflöſung.

Man ſetze die kleinere Zahl $= x$ und einer beliebigen Anzahl von Einheiten, z. B. $= x + 1$; die größere Zahl ſetze man gleich dem Quadrat der kleineren, weniger x^2, damit, wenn man die größere von dem Quadrat der kleineren abzieht, der Reſt gewiß ein Quadrat werde. Da nun das Quadrat der kleineren Zahl $= x^2 + 2x + 1$, ſo ſei die größere $= 2x + 1$, und nun fällt es in die Augen, daß die größere Zahl, von dem Quadrat der kleineren abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reſte läßt.

Nun ſoll aber auch das Quadrat der größeren, oder $4x^2 + 4x + 1$, nach Abzug der kleineren Zahl ein Quadrat ſein. Der Reſt aber iſt $4x^2 + 3x$, und dieſer ſoll alſo ein Quadrat ſein. Ich nehme $3x$ als Wurzel dieſes Quadrats an, ſo wird

$$9x^2 = 4x^2 + 3x, \text{ alſo } x = \frac{3}{5}.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo $\frac{8}{5}$, die größere $\frac{11}{5}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXIII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat einer jeden, wenn man die Summe beider Zahlen dazu addirt, wieder ein Quadrat zur Summe giebt.

Auflöſung.

Man ſetze die kleinere Zahl $=x$, die größere $=x+1$, damit das Quadrat der kleineren, nämlich x^2, zu der Summe beider Zahlen oder zu $2x+1$ addirt, gewiß ein Quadrat zur Summe gebe.

Nun ſoll auch das Quadrat der größeren, zur Summe beider Zahlen addirt, ein Quadrat geben. Aber das Quadrat der größeren zur Summe beider Zahlen addirt, giebt x^2+4x+2, und dieſer Ausdruck ſoll ein Quadrat ſein. Ich ſehe $x-2$ als die Wurzel dieſes Quadrats an, ſo iſt

$$x^2+4x+2=x^2-4x+4,$$

folglich wird $x=\frac{2}{8}$.

Die kleinere Zahl iſt alſo $\frac{2}{8}$, die größere $\frac{10}{8}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXIV. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat einer jeden, wenn man die Summe beider Zahlen davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reſte läßt.

Auflöſung.

Man ſetze die kleinere Zahl $=x$, die größere $=x+1$, damit das Quadrat der größeren, um die Summe der Zahlen vermindert, gewiß ein Quadrat bleibe.

Nun ſoll aber auch das Quadrat der kleineren, um die Summe der Zahlen vermindert, ein Quadrat geben, alſo x^2-2x-1 ſoll ein Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel $=x-3$, ſo wird

$$x^2-2x-1=x^2-6x+9, \text{ und } x=2\frac{1}{2}.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo $2\frac{1}{2}$, die größere $3\frac{1}{2}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXV. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die eine oder die andere Zahl dazu addirt.

Aufloſung.

Da x^2, ſowohl wenn man $3x^2$, als wenn man $8x^2$ dazu addirt, wieder ein Quadrat wird, ſo ſetze ich die eine Zahl $= 3x^2$, die andere Zahl $= 8x^2$, das Quadrat der Summe dieſer Zahlen aber ſetze ich $= x^2$, denn ſo giebt die Summe der Zahlen, zu einer jeden dieſer Zahlen addirt, gewiß ein Quadrat.

Die Summe der Zahlen macht aber $11x^2$, und das Quadrat der Summe iſt alſo $= 121x^4$, das Quadrat der Summe iſt aber auch $= x^2$, folglich iſt

$$121x^4 = x^2.$$

Nun müſſen auch die Wurzeln beider Zahlen gleich ſein, folglich iſt

$$11x^2 = x.$$

Man dividire alles durch die unbekannte Größe x, ſo wird

$$11x = 1, \text{ und } x = \frac{1}{11}.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo $\frac{3}{121}$, die größere $\frac{8}{121}$, das Quadrat der Summe aber iſt $\frac{121}{14641}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXVI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch

dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die eine oder die andere Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Ich nehme zuerſt ein beliebiges Quadrat, und ziehe von demſelben zwei Zahlen ab, die ich ſo wähle, daß beide Reſte Quadrate ſind. Ich nehme z. B. 16, denn wenn ich davon das eine Mal 12, das andere Mal 7 abziehe, ſo bleibt in beiden Fällen ein Quadrat zum Reſte.

Nun drücke ich die geſuchten Zahlen durch x^2 aus, die eine ſetze ich $= 12x^2$, die andere $= 7x^2$, und das Quadrat der Summe $= 16x^2$, denn ſo wird der Reſt gewiß ein Quadrat ſein, wenn ich eine der Zahlen von dem Quadrat ihrer Summe abziehe.

Nun ſoll das Quadrat der Summe, oder das Quadrat von $19x^2 = 16x^2$ ſein, folglich müſſen auch die Wurzeln dieſer Zahlen gleich ſein. Es iſt alſo

$$19x^2 = 4x, \text{ und } x = \frac{4}{19}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{192}{361}$, die zweite $\frac{112}{361}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXVII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt derſelben, wenn man die

eine oder die andere von beiden Zahl dazu addirt, in beiden Fällen ein Quadrat zur Summe giebt, die Summe der Wurzeln aber einer vorgeſchriebenen Zahl gleich wird.

Auflöſung.

Es ſei alſo vorgeſchrieben, daß die Summe beider Wurzeln $= 6$ ſein ſolle.

Wenn man zwei Zahlen hat, wovon die eine das Vierfache der anderen weniger 1 iſt, ſo giebt das Produkt dieſer Zahlen, zu der kleineren Zahl addirt, alle Mal ein Quadrat zur Summe. Ich ſetze daher die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 4x - 1$, denn nun trifft es zu, daß das Produkt der beiden Zahlen, wenn man die kleinere Zahl dazu addirt, ein Quadrat wird.

Nun ſoll aber auch eben dies Produkt, wenn man die größere Zahl oder $4x - 1$ dazu addirt, ein Quadrat werden, und die Wurzel dieſes Quadrats ſoll 6 weniger der Wurzel des kleineren Quadrates, oder $6 - 2x$ ſein, damit, der Aufgabe gemäß, die Summe der Wurzeln $= 6$ ſei. Aber das Produkt der beiden Zahlen, zu der größern addirt, giebt $4x^2 + 3x - 1$, das Quadrat von $6 - 2x$ aber iſt $4x^2 - 24x + 36$. Es iſt alſo

$$4x^2 + 3x - 1 = 4x^2 - 24x + 36, \text{ und } x = \frac{37}{27}.$$

Die kleinere Zahl hatten wir $= x$ geſetzt, und dieſe Zahl iſt alſo $\frac{37}{27}$, die größere hatten wir $= 4x - 1$ ge-

ſetzt, dieſe wird alſo $\frac{121}{27}$, und ſo werden die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

XXVIII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt, wenn man die eine oder die andere Zahl davon abzieht, in beiden Fällen ein Quadrat zum Reſte läßt, die Summe der Wurzeln aber einer gegebenen Zahl gleich wird.

Auflöſung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der Wurzeln $= 5$ ſei.

Wenn man zwei Zahlen hat, deren eine um 1 größer iſt, als das Vierfache der andern, ſo wird ihr Produkt gewiß ein Quadrat werden, wenn man die kleinere Zahl davon abzieht. Ich ſetze alſo die größere Zahl $= 4x + 1$, und die kleinere $= x$, ſo giebt ihr Produkt, wenn man die kleinere Zahl davon abzieht, zum Reſte $4x^2$, und dies iſt ein Quadrat, deſſen Wurzel $2x$ iſt.

Nun ſoll aber eben dies Produkt, auch wenn man die größere Zahl davon abzieht, ein Quadrat werden, und die Summe der Wurzeln ſoll die vorgeſchriebene Zahl 5 ſein. Aber wenn man von dem Produkt der bei-

den Zahlen die größere abzieht, ſo erhält man $4x^2-3x-1$, und dies ſoll das Quadrat von der Wurzel $5-2x$ ſein. Es iſt alſo

$$4x^2-3x-1=4x^2-20x+25, \text{ und } x=\frac{26}{17}.$$

Die kleinere Zahl iſt alſo $\frac{26}{17}$, die größere $\frac{121}{17}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXIX. Aufgabe.

Man ſoll zwei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man die eine oder die andere der beiden Zahlen dazu addirt.

Auflöſung.

Wenn ich die eine Zahl $=x^2$, die andere $=1$ ſetze, ſo iſt ihr Produkt ebenfalls $=x^2$, alſo eine Quadratzahl. Dieſes Produkt ſoll aber auch dann noch eine Quadratzahl ſein, wenn man die eine oder die andere der beiden Zahlen dazu addirt. Wir müſſen alſo zuerſt ein Quadrat ſuchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man 1 dazu addirt.

Zu dieſem Ende ſetze man das Quadrat, welches das Produkt beider Zahlen ſein ſoll, $=x^2$. Addirt man dazu 1, ſo erhält man x^2+1, und dieſe Zahl ſoll ein

Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel dieſes Quadrats $= x - 2$, ſo wird

$$x^2 + 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ und } x = \frac{3}{4}.$$

Das eine Quadrat iſt alſo $\frac{9}{16}$, das zweite $\frac{16}{16}$, und nun trifft es zu, daß das Produkt derſelben, um 1 vermehrt, ein Quadrat wird.

Nun ſoll aber daſſelbe Produkt, wenn man die andere Zahl dazu addirt, ebenfalls ein Quadrat werden, und da dies Produkt $\frac{9}{16}$ iſt, ſo drücke man die geſuchte Zahl durch x^2 aus; es ſoll alſo $\frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{16}$, oder wenn man alles durch 16 multiplicirt, $9x^2 + 9$, ein Quadrat ſein; man ſetze daher die Wurzel $= 3x - 4$, und das Quadrat ſelbſt $= 9x^2 - 24x + 16$. Man hat alſo

$$9x^2 + 9 = 9x^2 - 24x + 16, \text{ und } x = \frac{7}{24}.$$

Das erſte der geſuchten Quadrate iſt alſo $\frac{324}{576}$, das zweite $\frac{49}{576}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXX. Aufgabe.

Man ſoll zwei Quadrate von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt auch dann noch ein

Quadrat bleibt, wenn man das eine oder das andere der beiden Quadrate davon abzieht.

Auflöſung.

Wenn ich das eine Quadrat $=x^2$, und das andere $=1$ ſetze, ſo iſt ihr Produkt $=x^2$, und nun ſoll x^2-1 ein Quadrat ſein; x^2 aber iſt an ſich ſchon ein Quadrat, wir müſſen daher zuerſt ein Quadrat ſuchen, welches um 1 vermindert wieder ein Quadrat wird. Ein ſolches Quadrat iſt aber $\frac{25}{16}$, denn wenn man von dieſem 1 oder $\frac{16}{16}$ abzieht, ſo bleibt die Quadratzahl $\frac{9}{16}$.

Ich ſetze alſo das eine der geſuchten Quadrate $=x^2$, das andere $=\frac{25}{16}$, denn wenn ich nun von dem Produkte beider x^2 abziehe, ſo bleibt das Quadrat $\frac{9}{16}x^2$ übrig. Nun ſoll aber auch eben dies Produkt, wenn ich $\frac{25}{16}$ davon abziehe, noch immer ein Quadrat bleiben. Aber wenn ich von dem Produkte $\frac{25}{16}$ abziehe, ſo bleibt $\frac{25}{16}x^2-\frac{25}{16}$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Man multiplicire alles mit 16, und dividire darauf durch 25, ſo kommt x^2-1, und dieſe Zahl ſoll ein Quadrat ſein. Ich nehme $x-4$ als Wurzel an, ſo wird

$$x^2-1=x^2-8x+16, \text{ und } x=\frac{17}{8}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{289}{64}$, die zweite $\frac{100}{64}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXXI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, man mag die Summe der Zahlen dazu addiren, oder davon abziehen.

Aufloͤſung.

Da die Summe zweier beliebigen Quadrate alle Mal ein Quadrat wird, wenn man das doppelte Produkt der Wurzeln davon abzieht oder dazu addirt, ſo nehme ich zwei beliebige Zahlen, z. B. 2 und 3, und nun iſt Folgendes klar: wenn ich zu der Summe ihrer Quadrate das doppelte Produkt der beiden Zahlen addire, ſo erhalte ich das Quadrat 25, und wenn ich von der Summe ihrer Quadrate das doppelte Produkt der Zahlen abziehe, ſo erhalte ich das Quadrat 1.

Daher ſetze ich das Produkt der beiden Zahlen $= 13x^2$, und zwar die eine $= x$, die andere $= 13x$, denn dieſe beiden Factoren geben $13x^2$ zum Produkte. Aber $13x^2$ wird ein Quadrat, ich mag $12x^2$ dazu addiren oder eben dieſe Groͤße davon abziehen, daher ſetze ich die

Summe

Summe beider Zahlen = $12x^2$. Aber die Summe beider Zahlen iſt auch = $14x^2$, daher iſt

$$12x^2 = 14x, \text{ und } x = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}.$$

Die erſte Zahl war = x, dieſe iſt alſo $\frac{7}{6}$, die zweite Zahl war = 13x, dieſe wird alſo $\frac{91}{6}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXXII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß nicht nur ihre Summe ein Quadrat iſt, ſondern daß auch ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man die Summe derſelben dazu addirt, oder davon abzieht.

Auflöſung.

Wenn man zwei Zahlen hat, deren eine das Doppelte der anderen iſt, ſo iſt nicht bloß das doppelte Produkt derſelben ein Quadrat, ſondern die Summe ihrer Quadrate wird auch ein Quadrat, wenn man das doppelte Produkt davon abzieht, oder dazu addirt.

Wir nehmen alſo die Zahlen 4 und 2, ſo iſt klar, daß ihr doppeltes Produkt 16 eine Quadratzahl iſt, und daß die Summe ihrer Quadrate, nämlich 20, wenn man das doppelte Produkt dazu addirt, oder davon abzieht,

in dem einen Falle die Quadratzahl 36, in dem anderen die Quadratzahl 4 giebt.

Man drücke nun die geſuchten Zahlen durch das Quadrat der unbekannten Größe aus. Das Produkt der beiden Zahlen ſei $= 20x^2$, und die Summe derſelben $= 16x^2$, die eine Zahl ſelber ſei $= 2x$, die andere $= 10x$. Nun iſt die Summe der Zahlen das eine Mal $= 12x$, und dann auch der Annahme nach $= 16x^2$. Man hat alſo die Gleichung

$$16x^2 = 12x, \text{ und } x = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Die eine Zahl iſt alſo $\frac{6}{4}$, die andere $\frac{30}{4}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXXIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die nächſtfolgende Zahl dazu addirt.

Auflöſung.

Man ſetze die erſte Zahl $= x$. Wenn aber eine Zahl das Doppelte einer andern $+ 1$ iſt, ſo giebt das Quadrat der kleineren, mit der größeren Zahl zuſammen genommen, wieder ein Quadrat zur Summe. Daher ſetze man die zweite Zahl um 1 größer, als das Doppelte der er-

ſten, alſo $= 2x + 1$, die dritte Zahl aber ſetze man um 1 größer, als das Doppelte der zweiten, alſo $= 4x + 3$, und nun trifft es ſchon zu, daß das Quadrat der erſten, mit der zweiten Zahl zuſammen genommen, ein Quadrat, nämlich $x^2 + 2x + 1$ zur Summe giebt; ferner, daß das Quadrat der zweiten mit der dritten Zahl zuſammen genommen, auch ein Quadrat giebt, nämlich $4x^2 + 8x + 4$.

Nun ſoll auch das Quadrat der dritten mit der erſten Zahl zuſammen genommen, ein Quadrat zur Summe geben. Aber das Quadrat der dritten Zahl mit der erſten Zahl zuſammen genommen, giebt $16x^2 + 25x + 9$, und dieſe Formel ſoll ein Quadrat ſein. Ich nehme $4x - 4$ als Wurzel an, ſo wird

$$16x^2 + 25x + 9 = 16x^2 - 32x + 16, \text{ und } x = \frac{7}{57}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{7}{57}$, die zweite $\frac{71}{57}$, die dritte $\frac{199}{57}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXXIV. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die nächſtfolgende Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Wenn eine Zahl das Doppelte der anderen weniger 1 iſt, ſo giebt das Quadrat der kleineren Zahl, wenn man die größere davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reſte. Ich ſetze daher die erſte Zahl $= x+1$, die zweite $= 2x+1$, die dritte $= 4x+1$, und nun treffen ſchon zwei Bedingungen zu, nämlich, wenn man von dem Quadrat der erſten die zweite Zahl abzieht, oder von dem Quadrat der zweiten die dritte Zahl abzieht, ſo wird der Reſt in beiden Fällen ein Quadrat.

Nun ſoll aber auch das Quadrat der dritten, wenn man die erſte Zahl davon abzieht, ein Quadrat zum Reſte laſſen. Das Quadrat der dritten Zahl, weniger die erſte, iſt $= 16x^2+7x$, und dieſe Formel ſoll auch ein Quadrat ſein. Ich ſehe $5x$ als die Wurzel dieſes Quadrats an, ſo wird

$$25x^2 = 16x^2+7x, \text{ und } x = \frac{7}{9}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{16}{9}$, die zweite $\frac{23}{9}$, die dritte $\frac{37}{9}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXXV. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat einer jeden auch

dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der drei Zahlen dazu addirt.

Auflöſung.

Wenn man eine aus zwei Factoren beſtehende Zahl hat, und den kleineren Factor von dem größeren abzieht, die Hälfte des Reſtes ins Quadrat erhebt, und die zuerſt genommene Zahl dazu addirt, ſo wird die Summe alle Mal ein Quadrat ſein.

Ich ſetze daher die Summe der drei Zahlen einem gewiſſen Vielfachen von x^2 gleich, welches auf drei Arten in zwei Factoren zerfällt werden kann, z. B. $= 12x^2$, denn 12 hat die Factoren 1×12, 2×6, und 3×4. Nun ziehe ich den kleineren Factor von dem größeren ab, nehme von dem Reſt die Hälfte, und ſetze die erſte Zahl $= 5\frac{1}{2}$, die zweite $= 2$, die dritte $= \frac{1}{2}$, und aus dem angeführten Satze iſt klar, daß die Quadrate dieſer Zahlen, wenn man 12 dazu addirt, wieder Quadrate werden, nämlich $12\frac{1}{2}$, 16 und $42\frac{1}{4}$.

Nun drücke ich die drei Zahlen durch die obigen Coefficienten, und durch eine unbekannte Größe aus, die erſte Zahl ſei alſo $= 5\frac{1}{2}x$, die zweite $= 2x$, die

dritte $= \frac{1}{2}x$. Die Summe aller dieſer Zahlen ſoll $12x^2$ ſein, ſie iſt aber auch $= 8x$, folglich iſt

$$12x^2 = 8x, \text{ und } x = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{22}{6}$, die zweite $\frac{8}{6}$, die dritte $\frac{2}{6}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXXVI. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der Zahlen davon abzieht.

Auflöſung.

Ich nehme, gerade wie in der vorigen Aufgabe, eine Zahl, welche ſich auf drei Arten in Factoren zerfällen läßt. Dieſe Zahl ſei wiederum 12. Nun addire ich die zuſammen gehörigen Factoren, und nehme die Hälfte der Summe, und ſetze die erſte Zahl $= 6\frac{1}{2}x$, die zweite $= 4x$, die dritte $= 3\frac{1}{2}x$, und dieſe Zahlen haben die Eigenſchaft, daß ihre Quadrate, wenn man $12x^2$ davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reſte geben.

Nun ſetze ich die Summe der Quadrate $= 12x^2$, dieſe Summe iſt aber auch $= 14x$, man hat alſo die Gleichung

$$12x^2 = 14x, \text{ und } x = \frac{7}{6}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{45\frac{1}{2}}{6}$ oder $\frac{91}{12}$, die zweite $\frac{28}{6}$, die dritte $\frac{24\frac{1}{2}}{6}$ oder $\frac{49}{12}$.

Drittes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe derſelben ein Quadrat wird, wenn man das Quadrat jedweder Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Man nehme zwei Quadrate, das eine von der Wurzel x, das andere von der Wurzel 2x, ſo iſt die Summe ihrer Quadrate $= 5x^2$. Ich ſetze nun die Summe der drei Zahlen $= 5x^2$, die erſte der geſuchten Zahlen $= x$, die zweite $= 2x$, wodurch bereits zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

Da wir hier die Zahl 5 haben, welche die Summe der beiden Quadratzahlen 1 und 4 iſt, ſo theile man

dieſe Zahl noch ein Mal, durch das oben erläuterte Verfahren, in zwei andere Quadrate, nämlich in $\frac{4}{25}$ und $\frac{121}{25}$. Nun ſetze ich die dritte Zahl der Wurzel eines dieſer Quadrate gleich, z. B. $= \frac{2}{5}x$, denn das Quadrat dieſer Zahl, von der Summe aller drei Zahlen abgezogen, läßt ebenfalls ein Quadrat nämlich $\frac{121}{25}x^2$ zum Reſte.

Nun ſoll die Summe der drei Zahlen $=5x^2$ ſein, dieſe Summe aber iſt auch $=3\frac{2}{5}x$, daher iſt

$$5x^2 = \frac{17}{5}x, \text{ und } x = \frac{17}{25} = \frac{85}{125}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{85}{125}$, die zweite $\frac{170}{125}$, die dritte $\frac{34}{125}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

II. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwede Zahl dazu addirt.

Auflöſung.

Man ſetze das Quadrat der Summe aller drei Zahlen $= x^2$, die erſte derſelben $= 3x^2$, die zweite $= 8x^2$,

die dritte $= 15x^2$, damit das Quadrat der Summe, oder x^2 auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man jedwede dieſer drei Zahlen dazu addirt, im erſten Falle nämlich $4x^2$, im zweiten $9x^2$, im dritten $16x^2$.

Nun muß aber auch die Summe der drei Zahlen der Wurzel von dem Quadrat ihrer Summe, d. h. der unbekannten Zahl x, gleich ſein. Aber die Summe der drei Zahlen iſt $26x^2$, daher iſt

$$26x^2 = x, \text{ und } x = \frac{1}{26}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{3}{676}$, die zweite $\frac{8}{676}$, die dritte $\frac{15}{676}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

III. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht.

Auflöſung.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen $= 4x$, alſo das Quadrat der Summe $= 16x^2$. Dieſer Ausdruck bleibt ein Quadrat, man mag $7x^2$, oder $12x^2$, oder

$15x^2$ davon abziehen. Daher ſetze ich die erſte Zahl $= 7x^2$, die zweite $= 12x^2$, die dritte $= 15x^2$.

Nun muß die Summe dieſer drei Zahlen der Summe der drei geſuchten Zahlen gleich ſein. Die Summe der drei geſuchten Zahlen iſt $= 4x$ geſetzt worden, die Summe der hier angenommenen drei Zahlen iſt aber $34x^2$. Daher iſt

$$34x^2 = 4x,\ x = \frac{2}{17},\ x^2 = \frac{4}{289}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{28}{289}$, die zweite $\frac{48}{289}$, die dritte $\frac{60}{289}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

IV. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat ihrer Summe von jedweder Zahl abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reſte läßt.

Aufloͤſung.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen $= x$, alſo das Quadrat ihrer Summe $= x^2$, die drei Zahlen aber ſetze man der Reihe nach $2x^2$, $5x^2$, $10x^2$, denn ſo bleibt immer ein Quadrat übrig, wenn man das Quadrat der Summe oder x^2 von einer dieſer Zahlen abzieht. Und da das Quadrat der Summe eine rationale

Zahl zur Wurzel hat, ſo iſt klar, daß dieſe Wurzel mit der Summe der drei angenommenen Zahlen gleich ſein muß. Die Summe der drei Zahlen iſt $= x$, ſie iſt aber auch $= 17x^2$, daher iſt

$$17x^2 = x, \quad x = \frac{1}{17}, \quad x^2 = \frac{1}{289}.$$

Daher iſt die erſte Zahl $\frac{2}{289}$, die zweite $\frac{5}{289}$, die dritte $\frac{10}{289}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

V. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen ſuchen, deren Summe ein Quadrat iſt, und welche die Eigenſchaft haben, daß die Summe von je zweien um eine Quadratzahl größer iſt, als die dritte.

Auflöſung.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen, welche ein Quadrat ſein ſoll, $= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, und die Summe der erſten und der zweiten möge um 1 größer ſein, als die dritte, die dritte Zahl iſt alſo $= \frac{1}{2}x^2 + x$, denn auf dieſe Weiſe wird die Summe der erſten und zweiten Zahl um 1 größer werden, als die dritte. Die Summe der zweiten und dritten Zahl ſoll ebenfalls um eine Quadratzahl größer ſein, als die erſte, z. B. um

x^2; daher iſt die erſte Zahl $= x + \frac{1}{2}$; der Reſt aber iſt die zweite Zahl, und dieſe iſt alſo $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Endlich ſoll auch die Summe der erſten und dritten Zahl um eine Quadratzahl größer ſein, als die zweite. Aber der Ueberſchuß der erſten und dritten Zahl über die zweite iſt $2x$, und dieſer Ueberſchuß ſoll ein Quadrat ſein. Man ſetze alſo

$$2x = 16, \text{ ſo wird } x = 8.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $8\frac{1}{2}$, die zweite $32\frac{1}{2}$, und die dritte 40, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

VI.

Eine andere Aufloſung der vorigen Aufgabe.

Ich ſuche zuerſt drei Quadratzahlen, deren Summe auch ein Quadrat iſt. Wenn ich aber die Quadratzahlen 4 und 9 addire, und nun frage, welches Quadrat, um 13 vermehrt, wieder ein Quadrat giebt, ſo finde ich 36, denn die Summe dieſer drei Zahlen giebt wieder ein Quadrat 49.

Nunmehr beruht die Auflöſung darauf, daß wir drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe von je zweien um eine gegebene Zahl größer ſei, als die dritte, nämlich in unſerem Falle muß die Summe

der erſten und zweiten um 4 größer ſein, als die dritte, die Summe der zweiten und dritten um 9 größer als die erſte, und die Summe der erſten und dritten um 36 größer als die zweite.

Wie dieſe Aufgabe zu löſen ſei, iſt oben gezeigt worden, und man erhält für die erſte Zahl 20, für die zweite $9\frac{1}{2}$, für die dritte $22\frac{1}{2}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

VII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl die Summe von allen dreien als die Summe von je zweien ein Quadrat ſei.

Auflöſung.

Man ſetze die Summe von allen drei Zahlen, weil dieſelbe ein Quadrat ſein ſoll, $= x^2 + 2x + 1$, auch ſei die Summe der erſten und der zweiten Zahl $= x^2$, ſo wird die dritte $= 2x + 1$.

Die Summe der zweiten und der dritten Zahl ſetze man $= x^2 - 2x + 1$, von der Wurzel $x - 1$. Wenn nun die Summe von allen drei Zahlen $= x^2 + 2x + 1$ ſein ſoll, ſo wird die erſte Zahl $= 4x$ ſein müſſen. Die Summe der erſten und zweiten haben wir $= x^2$ geſetzt, folglich muß die zweite Zahl $= x^2 - 4x$ ſein.

Nun ſoll auch die Summe der erſten und der dritten Zahl, d. i. $6x+1$ ein Quadrat ſein. Man ſetze daher

$$6x+1 = 121, \text{ ſo wird } x = 20.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 80, die zweite 320, die dritte 41, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

VIII.

Eine andere Auflöſung der vorigen Aufgabe.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen $=x^2+2x+1$, und die Summe der erſten und zweiten $=x^2$, ſo iſt die dritte Zahl gleich dem Reſte $2x+1$.

Es ſei ferner die Summe der zweiten und dritten Zahl $= x^2-2x+1$, und da die dritte $2x+1$ war, ſo ziehe man dieſe von der vorigen Summe ab, um die zweite zu erhalten, die zweite Zahl wird alſo $=x^2-4x$.

Die Summe der erſten und der dritten Zahl war $=x^2$, die zweite aber $=x^2-4x$, folglich iſt die erſte Zahl $=4x$.

Nun giebt die Summe aller drei Zahlen wirklich die angenommene Quadratzahl x^2+2x+1, auch iſt die Summe der erſten und zweiten, ferner die Summe der zweiten und der dritten Zahl wirklich eine Quadratzahl. Es ſoll aber auch die Summe der erſten und der dritten Zahl, d. i. $6x+1$ ein Quadrat ſein.

Man ſetze alſo $6x + 1 = 36$, ſo iſt $x = \frac{35}{6}$, daher wird die erſte Zahl $\frac{140}{6} = \frac{840}{36}$, die zweite $\frac{385}{36}$, die dritte $\frac{456}{36}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

IX. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen ſuchen, deren Unterſchiede der Reihe nach gleich ſind, und welche zugleich die Beſchaffenheit haben, daß die Summe von je zweien ein Quadrat iſt.

Aufloͤſung.

Ich ſuche zuerſt drei Quadratzahlen, deren Unterſchiede der Reihe nach gleich ſind, und deren halbe Summe groͤßer iſt, als jedes der drei Quadrate einzeln genommen.

Ich ſetze alſo das erſte Quadrat $= x^2$, das zweite $= x^2 + 2x + 1$; der Unterſchied beider iſt $= 2x + 1$, wenn ich aber $2x + 1$ zu dem zweiten Quadrat addire, ſo wird das dritte $= x^2 + 4x + 2$. Dieſen Ausdruck ſetze man einem Quadrat von der Wurzel $x - 8$ gleich, ſo wird

$$x^2 + 4x + 2 = x^2 - 16x + 64, \text{ und } x = \frac{62}{20} = \frac{31}{10}.$$

Das

Das erſte der drei Quadrate iſt alſo 961, das zweite 1681, das dritte 2401, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt; denn es ſind drei Quadrate, deren Unterſchiede der Reihe nach gleich ſind, und die halbe Summe derſelben iſt größer, als jedes derſelben einzeln genommen.

Nun komme ich wieder zu der urſprünglichen Aufgabe, nämlich drei Zahlen von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß ihre Unterſchiede der Reihe nach gleich, die Summe von je zweien aber ein Quadrat iſt. Ich ſuche nämlich zuerſt drei Quadrate, deren Unterſchiede der Reihe nach gleich ſind; dies iſt aber ſo eben gezeigt worden, und das erſte der geſuchten Quadrate war 961, das zweite 1681, das dritte 2401. Nun müſſen wir aber ſehen, auf welche Weiſe die Summe der erſten und der zweiten Zahl, die wir ſuchen, $= 961$, die Summe der zweiten und dritten $= 2401$, die Summe der erſten und dritten $= 1681$ werde; denn wegen der gleichen Unterſchiede muß man die Ordnung umkehren, und die Summe der erſten und dritten $= 1681$ ſetzen.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen $= x$; ziehe ich davon die Summe der erſten und zweiten Zahl, nämlich 961 ab, ſo iſt die dritte Zahl $= x - 961$; ziehe ich von x die Summe der zweiten und dritten Zahl, nämlich 2401 ab, ſo habe ich die erſte Zahl $= x - 2401$; ziehe ich endlich von x die Summe der erſten und dritten Zahl, nämlich 1681 ab, ſo habe ich die zweite Zahl $= x - 1681$.

Nun ſoll die Summe aller drei Zahlen $= x$ ſein, das heißt

$$3x - 4043 = x, \text{ folglich wird } x = 2521\frac{1}{2},$$

und ſo iſt das Verlangte geſchehen.

X. Aufgabe.

Man ſoll zu einer gegebenen Zahl drei andere von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl die Summe von je zweien, als auch die Summe von allen dreien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 3, die Summe der beiden erſten Zahlen, welche man ſucht, ſei $= x^2 + 4x + 1$, damit ſie ein Quadrat werde, ſobald man 3 dazu addirt; die Summe der beiden folgenden Zahlen ſei $= x^2 + 6x + 6$, die Summe von aller dreien aber $= x^2 + 8x + 13$, damit auch dieſe Ausdrücke Quadrate werden, ſobald man 3 dazu addirt.

Da nun die Summe der drei Zahlen $= x^2 + 8x + 13$, die Summe der beiden erſten aber $= x^2 + 4x + 1$ iſt, ſo giebt der Reſt die dritte Zahl $= 4x + 12$.

Ferner, da die Summe aller drei Zahlen $= x^2 + 8x + 13$, die Summe der zweiten und dritten aber $= x^2 + 6x + 6$ iſt, ſo giebt der Reſt die erſte Zahl $= 2x + 7$.

Die Summe der erſten und zweiten Zahl iſt $=x^2+4x+1$, zieht man davon die erſte Zahl oder $2x+7$ ab, ſo erhält man die zweite Zahl $=x^2+2x-6$.

Nun ſoll auch die Summe der erſten und dritten Zahl, wenn man 3 dazu addirt, ein Quadrat werden. Wenn man aber zu der Summe der erſten und dritten Zahl 3 addirt, ſo erhält man $6x+22$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Man ſetze alſo

$$6x+22=100,$$

ſo wird $x=13$.

Die erſte Zahl iſt alſo 33, die zweite 189, die dritte 64, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XI. Aufgabe.

Man ſoll zu einer gegebenen Zahl drei andere von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl die Summe von je zweien, als die Summe von allen dreien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei wiederum 3, die Summe der beiden erſten geſuchten Zahlen ſei $=x^2+3$, damit dieſer Ausdruck ein Quadrat werde, wenn man 3 davon abzieht; ferner ſei die Summe der zweiten und dritten Zahl $=x^2+2x+4$, und die Summe aller drei Zahlen

$=x^2+4x+7$, damit auch dieſe Ausdrücke Quadrate werden, wenn man 3 davon abzieht.

Da nun die Summe der drei Zahlen $=x^2+4x+7$, die Summe der erſten und zweiten Zahl aber $=x^2+3$ iſt, ſo giebt der Reſt die dritte Zahl $=4x+4$.

Da ferner die Summe der zweiten und der dritten Zahl $=x^2+2x+4$, die dritte Zahl aber $=4x+4$ iſt, ſo giebt der Reſt die zweite Zahl $=x^2-2x$.

Da endlich die Summe der erſten und zweiten Zahl $=x^2+3$, die zweite aber $=x^2-2x$ iſt, ſo wird die erſte Zahl $=2x+3$.

Nun ſoll auch die Summe der zweiten und dritten Zahl, wenn man 3 davon abzieht, ein Quadrat werden; wenn man aber von der Summe der zweiten und dritten Zahl 3 abzieht, ſo erhält man $6x+4$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Man ſetze alſo

$$6x+4=64, \text{ ſo wird } x=10.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 23, die zweite 80, die dritte 44, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man eine gegebene Zahl dazu addirt.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 12. Es wird zuerſt verlangt, daß das Produkt der erſten und zweiten Zahl, wenn man 12 dazu addirt, ein Quadrat werde; ich ziehe daher von einem beliebigen Quadrat die gegebene Zahl 12 ab, und erhalte dadurch das Produkt der erſten und zweiten Zahl. Ich nehme z. B. 25; ziehe ich davon 12 ab, ſo habe ich das Produkt der erſten und zweiten Zahl, nämlich 13. Die erſte Zahl ſei alſo 13, die zweite 1. Man mache dieſe Zahlen aber zu Coefficienten einer unbekannten Größe, jedoch ſo, daß ihr Produkt 13 ſei; die erſte Zahl ſei alſo $= 13x$, und die zweite $= \frac{1}{x}$.

Wenn ich nun von einem anderen Quadrate 12 abziehe, ſo habe ich das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Ich ziehe z. B. 12 von dem Quadrat 16 ab, ſo iſt 4 das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Man drücke die beiden Factoren wieder vermittelſt der unbekannten Größe aus, jedoch ſo, daß ihr Produkt 4 wird. Die zweite Zahl war aber $= \frac{1}{x}$, folglich muß die dritte $= 4x$ ſein.

Nun ſoll auch das Produkt der erſten und der dritten Zahl, wenn man 12 dazu addirt, ein Quadrat werden; aber das Produkt der erſten und dritten Zahl iſt $52x^2$, folglich ſoll $52x^2 + 12$ ein Quadrat ſein. Wenn nun die Zahl 13, oder der Coefficient der erſten Zahl

ein Quadrat wäre, ſo wäre die Gleichung ganz leicht; da dies aber nicht der Fall iſt, ſo muß ich zuerſt zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Quadrat ſei, und außerdem jede von ihnen ein Quadrat wird, wenn man 12 dazu addirt. Wenn ich aber für die geſuchten Zahlen ein Paar Quadratzahlen ſuche, ſo wird ihr Produkt gewiß ein Quadrat ſein. Es iſt alſo nur nöthig, zwei Quadratzahlen zu ſuchen, deren jede wieder ein Quadrat wird, wenn man 12 dazu addirt. Dies iſt aber leicht, und es hat wie geſagt, keine Schwierigkeit die Gleichung aufzulöſen. Das eine Quadrat iſt nämlich 4, das andere $\frac{1}{4}$, denn beide geben ein Quadrat, wenn man 12 dazu addirt.

Nachdem wir dies gefunden haben, ſo kehre ich wieder zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, und ſetze die erſte Zahl $= 4x$, die zweite $= \frac{1}{x}$, die dritte $= \frac{1}{4}x$.

Nun ſoll aber das Produkt der erſten und dritten Zahl, wenn man 12 dazu addirt, auch ein Quadrat ſein, aber das Produkt der erſten und dritten Zahl iſt x^2, folglich ſoll $x^2 + 12$ ein Quadrat ſein. Ich nehme $x + 3$ als die Wurzel dieſes Quadrats an, ſo wird

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 12, \text{ und } x = \frac{3}{6}.$$

Und ſo iſt das Verlangte geſchehen.

XIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien wieder ein Quadrat wird, wenn man eine gegebene Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 10. Es wird zuerſt verlangt, daß das Produkt der erſten und zweiten Zahl ein Quadrat werde, wenn man 10 davon abzieht; wir addiren daher zu irgend einem Quadrate die Zahl 10, und erhalten dadurch das Produkt der erſten und zweiten Zahl. Man nehme z. B. das Quadrat 4, ſo iſt das Produkt der erſten und zweiten Zahl 14. Die erſte Zahl ſei alſo 14, die zweite 1. Man mache dieſe Zahlen wieder zu Coefficienten einer unbekannten Größe, jedoch ſo, daß ihr Produkt 14 ſei; die erſte Zahl ſei alſo $= 14x$, die zweite $= \frac{1}{x}$.

Wenn ich nun zu einem anderen Quadrate ebenfalls 10 addire, ſo habe ich das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Man nehme das Quadrat 9, ſo iſt das Produkt der zweiten und dritten Zahl $= 19$; da nun die zweite Zahl $\frac{1}{x}$ war, ſo muß die dritte $= 19x$ ſein.

Nun ſoll auch das Produkt der erſten und dritten Zahl ein Quadrat werden, wenn man 10 davon abzieht; dieſe Rechnung giebt aber $266x^2 - 10$, und dieſer Ausdruck ſoll ein Quadrat ſein. Daher muß ich aus den bei der vorigen Aufgabe angeführten Gründen erſt zwei Quadrate ſuchen, deren jedes wieder ein Quadrat wird, wenn man 10 davon abzieht. Dies iſt aber ganz leicht, denn man darf nur unterſuchen, welches Quadrat auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man 10 davon abzieht.

Wenn ich aber zu einer beliebigen Zahl 1 addire, die Hälfte der Summe ins Quadrat erhebe und von dem ſo entſtandenen Quadrate die zuerſt genommene Zahl abziehe, ſo iſt der Reſt wieder ein Quadrat. Ich addire alſo 1 zu 10, die Hälfte der Summe oder $5\frac{1}{2}$ erhebe ich ins Quadrat, dies giebt $30\frac{1}{4}$, davon ziehe ich 10 ab, ſo erhalte ich $20\frac{1}{4}$, ein Quadrat, deſſen Wurzel $4\frac{1}{2}$ iſt.

Ich ſetze alſo die erſte Zahl $= 30\frac{1}{4}$, die dritte $= x^2$. Nun ſoll alſo auch $x^2 - 10$ ein Quadrat ſein; ich ſehe $x - 2$ als die Wurzel dieſes Quadrats an, ſo wird

$$x^2 - 10 = x^2 - 4x + 4, \text{ und } x = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Die dritte Zahl alſo, welche ich $= x^2$ geſetzt hatte, wird $\frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$; die erſte aber iſt $= 30\frac{1}{4}$, und beide laſ-

ſen, ein Quadrat zum Reſte, wenn man 10 davon abzieht.

Nun komme ich wieder auf die urſprüngliche Aufgabe, und ſetze die erſte Zahl $= 30\frac{1}{4}x$, die zweite $= \frac{1}{x}$, die dritte $= 12\frac{1}{4}x$. Es ſoll alſo noch das Produkt der erſten und dritten Zahl, wenn man 10 davon abzieht, ein Quadrat werden. Dies Produkt iſt aber $370\frac{1}{2} \times \frac{1}{16}x^2$ oder $\frac{5929}{16}x^2$, alſo ſoll $\frac{5929}{16}x^2$ ein Quadrat werden, wenn man 10 davon abzieht. Damit aber die Brüche weggeſchafft werden, ſo multiplicire ich dieſe Zahl mit der Quadratzahl 16, ſo muß auch $5929x^2 - 160$ ein Quadrat ſein. Ich ſetze daher

$$5929x^2 - 160 = (77x - 2)^2 = 5929x^2 - 308x + 4,$$

ſo wird $x = \frac{41}{77}$.

Die erſte Zahl hatten wir $= 30\frac{1}{4}x$ geſetzt, dieſe iſt alſo $\frac{1240\frac{1}{4}}{77}$, die zweite hatten wir $= \frac{1}{x}$ geſetzt, dieſe iſt alſo $\frac{77}{41}$, die dritte Zahl hatten wir $= 12\frac{1}{4}x$ geſetzt, dieſe iſt alſo $\frac{502\frac{1}{4}}{77}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XIV. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien wieder ein Quadrat wird, wenn man die dritte dazu addirt.

Auflöſung.

Wir verlangen zuerſt, daß das Produkt der erſten und zweiten Zahl ein Quadrat werde, wenn man die dritte dazu addirt. Wenn wir alſo ein beliebiges Quadrat nehmen, und ein Stück deſſelben als die dritte Zahl, den Reſt aber als das Produkt der erſten und zweiten Zahl anſehen, ſo erfüllen wir ſchon eine von den Bedingungen der Aufgabe. Man mache alſo das Quadrat von $x+3 = x^2+6x+9$, und ſetze 9 als die dritte Zahl, x^2+6x als das Produkt der erſten und zweiten Zahl an; man ſetze daher die erſte Zahl $=x$, ſo iſt die zweite $=x+6$.

Nun ſoll aber auch das Produkt der zweiten und dritten Zahl, wenn man die erſte Zahl dazu addirt, d. i. $10x+54$ ein Quadrat werden, und eben ſo ſoll das Produkt der erſten und dritten Zahl, wenn die zweite dazu kommt, d. i. $10x+6$ ein Quadrat ſein, und wir haben alſo hier die doppelte Gleichung.

Der Unterſchied der beiden Zahlen iſt nämlich 48. Man muß alſo zwei Quadrate ſuchen, deren Unterſchied 48 iſt; das iſt aber leicht und kann auf unzählige Arten geſchehen. Das kleinere wird z. B. 16, das größere 64. Welches von beiden Quadraten wir nun zum Anſatz der Gleichung gebrauchen, ſo finden wir denſelben Werth für x. Denn wenn wir ſagen, das größere Quadrat iſt $= 64$, oder

$$10x + 54 = 64,$$

ſo finden wir den Werth von $x = 1$. Und wenn wir ſagen, das kleinere Quadrat iſt $= 16$, oder

$$10x + 6 = 16,$$

ſo finden wir den Werth von x ebenfalls $= 1$.

Die erſte geſuchte Zahl iſt alſo 1, die zweite 7, die dritte 9, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XV. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die dritte Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Man ſetze die erſte Zahl $= x$, die zweite $= x + 4$, ſo iſt ihr Produkt $= x^2 + 4x$. Dies Produkt ſoll ein

Quadrat werden, wenn man die dritte Zahl davon abzieht; man ſetze alſo die dritte Zahl $= 4x$, ſo iſt eine Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Nun ſoll aber auch das Produkt der zweiten und dritten Zahl, wenn man die erſte davon abzieht, und das Produkt der erſten und dritten Zahl, wenn man die zweite davon abzieht, ein Quadrat werden. Aber wenn man von dem Produkt der zweiten und dritten Zahl die erſte abzieht, ſo erhält man $4x^2 + 15x$, und dies ſoll ein Quadrat ſein, und wenn man von dem Produkt der erſten und dritten Zahl die zweite abzieht, ſo erhält man $4x^2 - x - 4$, und dies ſoll auch ein Quadrat ſein.

Wir haben hier alſo wieder den Fall der doppelten Gleichung. Der Unterſchied der beiden Zahlen iſt $16x + 4$; dieſen Unterſchied zerfälle ich in die beiden Factoren, 4 und $4x + 1$. Nun ſetze ich entweder das Quadrat der halben Summe dieſer Faktoren der größeren Zahl gleich, oder das Quadrat ihres halben Unterſchiedes der kleineren Zahl gleich, und ich finde in beiden Fällen $x = \frac{25}{20}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{25}{20}$, die zweite $\frac{105}{20}$, die dritte $\frac{100}{20}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XVI. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt aus je zweien ein

Quadrat wird, wenn man das Quadrat der dritten dazu addirt.

Auflöſung.

Man ſetze die erſte Zahl $=x$, die zweite $=4x+4$, die dritte $=1$, damit ſogleich zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Nun ſoll aber auch das Produkt der erſten und dritten Zahl, wenn man das Quadrat der zweiten Zahl dazu addirt, ein Quadrat werden. Aber wenn man zu dem Produkt der erſten und dritten Zahl das Quadrat der zweiten addirt, ſo erhält man $16x^2+33x+16$, und dies ſoll ein Quadrat werden. Ich ſetze die Wurzel $=4x-5$, ſo wird

$$16x^2+33x+16=16x^2-40x+25, \text{ und } x=\frac{9}{73}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 9, die zweite 328, die dritte 73.

XVII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider Zahlen dazu addirt.

Auflöſung.

Wenn man zu dem Produkt zweier auf einander folgenden Quadrate die Summe von beiden hinzulegt,

ſo wird die Summe wieder ein Quadrat; daher ſetze man die erſte Zahl $=4$, die zweite $=9$, damit das Quadrat, welches aus der Multiplication beider entſteht, nämlich 36, auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn die Summe beider dazu kommt.

Nun ſoll aber auch das Produkt der zweiten und dritten, imgleichen das Produkt der erſten und dritten ein Quadrat werden, wenn man die Summe der beiden multiplicirten Zahlen dazu addirt. Man ſetze alſo die dritte Zahl $=x$, ſo wird das Produkt der zweiten und dritten Zahl, wenn man die Summe von beiden dazu legt, $=10x+9$, und dieſer Ausdruck ſoll ein Quadrat ſein. Wenn aber zu dem Produkte der erſten und dritten Zahl die Summe beider hinzukommt, ſo erhält man $5x+4$, und dieſer Ausdruck ſoll auch ein Quadrat ſein.

Hier läßt ſich wieder die doppelte Gleichung anwenden. Der Unterſchied der beiden Ausdrücke iſt $5x+5$; dieſen zerfälle ich in zwei Factoren, nämlich $x+1$ und 5. Und nun ſetze man, wie wir im zweiten Buche gezeigt haben, entweder das Quadrat der halben Summe dieſer Faktoren dem größeren Quadrate gleich, oder das Quadrat ihres halben Unterſchiedes dem kleineren Quadrate gleich, und man erhält $x=28$.

Die erſte Zahl iſt alſo 4, die zweite 9, die dritte 28, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XVIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider Zahlen dazu addirt.

Auflöſung.

Man ſetze die erſte Zahl $=x$, die zweite $=3$. Addirt man nun zu ihrem Produkt die Summe von beiden, ſo erhält man $4x+3$. Dies ſoll ein Quadrat ſein; man ſetze alſo

$$4x+3=25, \text{ ſo wird } x=5\frac{1}{2}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $5\frac{1}{2}$, und die zweite 3, und ſo iſt eine Bedingung der Aufgabe bereits erfüllt. Denn wenn man zu dem Produkt dieſer beiden Zahlen noch die Summe derſelben addirt, ſo erhält man das Quadrat 25.

Nun ſoll aber auch das Produkt der zweiten und dritten, imgleichen das Produkt der erſten und dritten Zahl ein Quadrat werden, wenn man die Summe von beiden dazu addirt. Man ſetze nunmehr die dritte Zahl $=x$; und wenn man nun zu dem Produkt der zweiten und dritten Zahl die Summe beider addirt, ſo erhält

man wieder $4x+3$; und wenn man zu dem Produkt der erſten und dritten die Summe beider addirt, ſo erhält man $6\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$, und dieſe beiden Ausdrücke ſollen Quadrate ſein.

Da aber in beiden Ausdrücken die Coefficienten von x, und die beſtimmten Zahlen (3 und $5\frac{1}{2}$) unter einander ungleich ſind, und ſich auch nicht wie ein Paar Quadratzahlen gegen einander verhalten, ſo iſt der ganze Anſatz unzweckmäßig, und es kommt jetzt darauf an, zwei Zahlen von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man noch die Summe von beiden dazulegt, und außerdem die um 1 vergrößerten Zahlen ſich wie zwei Quadratzahlen gegen einander verhalten.

Wenn eine Zahl das Vierfache der anderen um 3 überſteigt, ſo verhalten ſich die um 1 vergrößerten Zahlen wie zwei Quadrate zu einander. Daher ſetze ich die eine Zahl $=x$, die andere $=4x+3$. Wenn ich nun zu dem Produkt dieſer Zahlen die Summe von beiden addire, ſo ſoll ein Quadrat herauskommen; wenn ich aber zu dem Produkt dieſer Zahlen die Summe beider addire, ſo erhalte ich $4x^2+8x+3$, und dies ſoll alſo ein Quadrat ſein. Ich nehme $2x-3$, als Wurzel an, ſo iſt

$$4x^2+8x+3=4x^2-12x+9, \text{ und } x=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}.$$

Die

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{42}{10}$ oder $4\frac{1}{5}$, und nun iſt eine Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Es ſoll aber auch das Produkt der zweiten und dritten, imgleichen das Produkt der erſten und dritten Zahl, wenn man die Summe von beiden dazu addirt, ein Quadrat werden. Ich ſetze nunmehr die dritte Zahl $= x$, die zweite aber war $4\frac{1}{5}$, wenn ich alſo zu dem Produkte dieſer Zahlen ihre Summe addire, ſo erhalte ich $5\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{5}$, und dieſe Zahl ſoll ein Quadrat ſein, z. B. $= 25$.

Da die dritte Zahl $= x$, und die erſte $= \frac{3}{10}$, ſo wird das Produkt beider, wenn noch die Summe derſelben dazukommt, $= \frac{13}{10}x + \frac{3}{10}$, und dieſer Ausdruck ſoll auch ein Quadrat ſein, z. B. $= 100$.

Nunmehr multiplicire ich $5\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{5}$ mit 25, ſo muß auch das Produkt $130x + 105$ ein Quadrat ſein, eben ſo multiplicire ich $\frac{13}{10}x + \frac{3}{10}$ mit 100, ſo muß auch das Produkt $130x + 30$ ein Quadrat ſein. Der Unterſchied beider Ausdrücke iſt 75, und nun findet wieder die doppelte Gleichung Statt, aus welcher man $x = \frac{7}{10}$ erhält.

Die dritte Zahl iſt alſo $\frac{7}{10}$, die erſte $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{42}{10}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XIX. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider Zahlen davon abzieht.

Auflöſung.

Wenn ich, wie in der vorigen Aufgabe, die erſte Zahl $= x$ ſetze, für die zweite aber eine beliebige Zahl nehme, ſo komme ich wieder auf eine unauflösbare Schwierigkeit. Damit ich nun für x ſolche Coefficienten bekomme, welche ſich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten, ſo kommt es zuerſt darauf an, zwei Zahlen von der Beſchaffenheit zu finden, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider davon abzieht, beide Zahlen aber, um 1 vermindert, ſich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten.

Wenn eine Zahl das Vierfache der anderen weniger 3 iſt, ſo verhalten ſich die um 1 verminderten Zahlen wie zwei Quadrate zu einander. Denn wenn man von beiden Zahlen 1 abzieht, ſo ſind die abgezogenen Stücke

bei der einen 1, bei der anderen 4. Wenn man aber von zwei Zahlen, die ſich wie 1:4 verhalten, zwei Zahlen abzieht, welche ſich auch wie 1:4 verhalten, ſo iſt klar, daß auch die Reſte in dem Verhältniß 1:4 ſtehen müſſen, und ſich folglich wie zwei Quadrate zu einander verhalten.

Ich ſetze daher die erſte Zahl $= x + 1$, die zweite $= 4x + 1$, und wenn man nun von dem Produkte beider Zahlen die Summe derſelben abzieht, ſo erhält man $4x^2 - 1$. Die Wurzel dieſer Zahl ſetze ich $= 2x - 2$, ſo wird

$$4x^2 - 1 = 4x^2 - 8x + 4, \text{ und } x = \frac{5}{8}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{13}{8}$, die zweite $\frac{28}{8}$, und dadurch iſt eine Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Da ich nun die erſte Zahl $\frac{13}{8}$, und die zweite $\frac{28}{8}$ bereits kenne, ſo ſetze ich nunmehr die **dritte** $= x$, das Produkt der zweiten und dritten iſt alſo $3\frac{1}{2}x$, und wenn ich davon die Summe beider, nämlich $x + 3\frac{1}{2}$ abziehe, ſo bleibt $2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$, und dies ſoll ein Quadrat z. B. $= 4$ ſein. Das Produkt der erſten und dritten Zahl iſt $\frac{13}{8}x$, und wenn ich davon die Summe beider oder $x + \frac{13}{8}$ abziehe, ſo bleibt $\frac{5}{8}x - \frac{13}{8}$, und dies ſoll auch ein Quadrat, z. B. $= 16$ ſein.

Nun multiplicire ich $\frac{5}{8}x - \frac{13}{8}$ mit 16, ſo muß auch $10x - 26$ ein Quadrat ſein, und eben ſo multiplicire ich $2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$ mit 4, ſo muß auch $10x - 14$ ein Quadrat ſein. Der Unterſchied dieſer beiden Quadrate iſt 12, welcher aus den Faktoren 2 und 6 entſteht. Nun iſt das Quadrat der halben Summe $= 16$, und das iſt dem größeren Quadrate gleich, alſo wird

$$10x - 14 = 16, \text{ und } x = 3.$$

Daher iſt die dritte Zahl $= 3$ oder $\frac{24}{8}$, die erſte Zahl aber war $\frac{13}{8}$, und die zweite $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{28}{8}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XX. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, man mag nun jede der beiden Zahlen einzeln, oder die Summe von beiden dazu addiren.

Auflöſung.

Man ſetze die eine Zahl $= x$, die andere $= 4x - 1$, denn wenn eine Zahl das Vierfache der andern weniger 1 iſt, ſo wird ihr Produkt ein Quadrat, wenn man die kleinere dazu addirt. Nun ſind aber noch zwei Bedingungen zu erfüllen, nämlich, daß das Produkt dieſer

Zahlen ein Quadrat werde, ſowohl wenn man die größere Zahl, als wenn man die Summe beider dazu addirt. Wenn man aber zu dem Produkt dieſer beiden Zahlen die größere von beiden addirt, ſo erhält man $4x^2+3x-1$, und wenn man zu eben dieſem Produkt die Summe beider Zahlen addirt, ſo erhält man $4x^2+4x-1$, und beides ſoll ein Quadrat ſein.

Hier kann man wieder die doppelte Gleichung anwenden. Der Unterſchied beider Zahlen iſt x, und dieſer hat die Factoren $\frac{1}{4}$ und $4x$, und ſo erhält man $x=\frac{65}{224}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{65}{224}$, die zweite $\frac{36}{224}$, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

XXI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, man mag nun jede der beiden Zahlen einzeln, oder die Summe beider davon abziehen.

Aufloſung.

Man ſetze die eine Zahl $=x+1$, die andere $=4x$, denn wenn eine Zahl das Vierfache der anderen weniger 4 iſt, ſo wird ihr Produkt ein Quadrat, wenn man die größere Zahl davon abzieht.

Nun ſoll aber das Produkt dieſer beiden Zahlen auch dann noch ein Quadrat werden, wenn man entweder die kleinere Zahl oder die Summe beider davon abzieht. Wenn man aber von dieſem Produkte die kleinere Zahl abzieht, ſo erhält man $4x^2+3x-1$, und wenn man von dieſem Produkte die Summe beider Zahlen abzieht, ſo erhält man $4x^2-x-1$, und beide Ausdrücke ſollen Quadrate ſein. Der Unterſchied dieſer Ausdrücke iſt $4x$, als Factoren dieſes Unterſchiedes nehme ich $4x$ und 1, ſo wird $x = 1\frac{1}{4}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $2\frac{1}{4}$, die zweite 5, und der Beweis fällt in die Augen.

XXII. Aufgabe.

Man ſoll vier Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man jedwede der Zahlen entweder dazu addirt oder davon abzieht.

Auflöſung.

Da in jedem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat der Hypotenuſe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man das doppelte Produkt der Katheten davon abzieht oder dazu addirt, ſo ſuche ich zuerſt vier rechtwinklige

Dreiecke, deren Hypotenuſen einander gleich ſind, das heißt, ich theile ein Quadrat auf vier verſchiedene Arten in zwei andere Quadrate, und wir haben bereits gelernt, wie man ein Quadrat auf unzählige Arten in zwei andere Quadrate theilen könne.

Wir nehmen alſo zwei rechtwinklige Dreiecke in den kleinſten Zahlen, das eine werde durch die Zahlen 3, 4 und 5, das andere durch die Zahlen 5, 12 und 13 vorgeſtellt. Nun multiplicire man jedes dieſer Dreiecke mit der Hypotenuſe des anderen, ſo wird das erſte durch die Zahlen 39, 52 und 65, das zweite durch die Zahlen 25, 60 und 65 vorgeſtellt, und beide Dreiecke ſind rechtwinklig, und haben gleiche Hypotenuſen.

Die Zahl 65 theilt ſich von ſelbſt auf zweierlei Art in zwei Quadrate, nämlich zuerſt in 16 und 49, und dann wieder in 64 und 1, welches ſeinen Grund darin hat, daß 65 aus der Multiplication der Faktoren 5 und 13 entſtanden iſt, deren jeder die Summe von zwei Quadraten iſt. Nun nehme ich die Wurzeln der Quadrate 49 und 16, nämlich 7 und 4, und bilde aus dieſen Zahlen ein rechtwinkliges Dreieck, welches alſo durch die Zahlen 33, 56 und 65 vorgeſtellt wird. Ich nehme ferner die Wurzeln der Quadrate 64 und 1, nämlich 8 und 1, und bilde aus dieſen Zahlen wieder ein rechtwinkliges Dreieck, deſſen Seiten alſo 16, 63 und 65 ſind, und nunmehr habe ich vier rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuſen einander gleich ſind.

Nunmehr komme ich auf die urſprüngliche Aufgabe zurück, und ſetze die Summe aller vier Zahlen $=65x$, jede der Zahlen ſetze ich $=x^2$ mit einem Coefficienten, welcher die vierfache Fläche des Dreiecks ausdrückt, die erſte Zahl alſo $=4056x^2$, die zweite $=3000x^2$, die dritte $=3696x^2$, und die vierte endlich $=2016x^2$. Die Summe dieſer vier Zahlen iſt $12768x^2$, folglich wird

$$12768x^2 = 65x, \text{ und } x = \frac{65}{12768}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 17136600, die zweite 12675000, die dritte 15615600, die vierte 8517600, jede mit dem Nenner 163021824.

XXIII. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und ein Quadrat ſuchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwedes Stück der gegebenen Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 10. Man ſetze das geſuchte Quadrat $=x^2+2x+1$, welches die Eigenſchaft hat, daß es ein Quadrat bleibt, ſowohl wenn man $2x+1$, als wenn man $4x$ davon abzieht.

Ich ſetze daher das eine Stück der Zahl $10=2x+1$, das andere $=4x$. Die Summe dieſer Stücke muß aber der gegebenen Zahl gleich ſein, alſo iſt

$$6x+1=10, \text{ und } x = 1\frac{1}{2}.$$

Das erſte Stück iſt alſo $=4$, das zweite $=6$, das geſuchte Quadrat aber iſt $=6\frac{1}{4}$.

XXIV. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und dazu ein Quadrat ſuchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwedes der beiden Stücke dazu addirt.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 20; das geſuchte Quadrat ſetze man $=x^2+2x+1$. Nun mag man zu dieſem Quadrate $2x+3$, oder $4x+8$ addiren, ſo wird die Summe in jedwedem Falle wieder ein Quadrat.

Daher ſetze ich das erſte Stück der gegebenen Zahl $=2x+3$, das zweite $=4x+8$, die Summe beider iſt $6x+11$, alſo wird

$$6x+11=20, \text{ und } x=\frac{9}{6}=1\frac{1}{2}.$$

Das erſte Stück iſt alſo 6, das zweite 14, das geſuchte Quadrat aber iſt $6\frac{1}{4}$, und der Beweis fällt in die Augen.

Viertes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei Kubikzahlen theilen, deren Wurzeln eine vorgeſchriebene Summe geben.

Auflöſung.

Man ſoll z. B. 370 in zwei Kubikzahlen theilen, und die Summe beider Wurzeln ſoll $=10$ ſein.

Man ſetze die Wurzel der erſten Kubikzahl $=x+5$, wo 5 die halbe Summe der Wurzeln iſt, ſo iſt die Wurzel der andern Kubikzahl $=5-x$, die Summe der Kubikzahlen aber iſt $=30x^2+250$. Dieſe Summe muß der gegebenen Zahl gleich ſein, alſo iſt

$$30x^2+250=370, \text{ und } x=2.$$

Die Wurzel der erſten Kubikzahl iſt alſo 7, die der zweiten 3, die Kubikzahlen ſelbſt ſind 343 und 27.

II. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl die Zahlen ſelbſt als die Cubi derſelben einen vorgeſchriebenen Unterſchied haben.

Auflöſung.

Der vorgeſchriebene Unterſchied der Zahlen ſei 6, der Unterſchied ihrer Cubi 504.

Man ſetze wieder die Wurzel des größeren Cubus $= x + 3$, die Wurzel des kleineren $= x - 3$, ſo iſt ihr Unterſchied wirklich $= 6$. Nun ſoll aber auch der Unterſchied ihrer Cubi $= 504$ ſein, der Unterſchied der Cubi iſt aber $18x^2 + 54$. Es iſt alſo

$$18x^2 + 54 = 504, \text{ und } x = 5.$$

Die Wurzel des größeren Cubus iſt alſo 8, die des kleineren 2, die Cubi ſelbſt ſind 512 und 8, und der Beweis fällt in die Augen.

III. Aufgabe.

Man ſoll ein Quadrat und deſſen Wurzel mit einerlei Zahl multipliciren, und dadurch die Quadratwurzel zu einer Kubikzahl, das Quadrat aber zu deren Kubikwurzel machen.

Auflöſung.

Man ſetze das Quadrat $=x^2$, ſeine Wurzel alſo $=x$, die Zahl womit man beide multipliciren muß, ſei irgend eine beſtimmte Kubikzahl durch x dividirt z. B. $\frac{8}{x}$. Multipliciren wir dieſe Zahl mit x^2, ſo erhalten wir $8x$, multipliciren wir ſie aber mit x, ſo erhalten wir 8. Nun ſoll aber $8x$ die Kubikwurzel von 8 ſein, alſo iſt

$$8x = \sqrt[3]{8} = 2, \text{ und } x = \frac{1}{4}.$$

Das geſuchte Quadrat iſt alſo $\frac{1}{16}$, die Wurzel desſelben $\frac{1}{4}$, und die Zahl womit man beide multipliciren muß, iſt 32, denn wenn $x = \frac{1}{4}$, ſo iſt $\frac{1}{x} = 4$, und der Beweis fällt in die Augen.

IV. Aufgabe.

Man ſoll zu einem Quadrat und zu deſſen Wurzel dieſelbe Zahl addiren, und die entſtandenen Zahlen ſollen die nämliche Eigenſchaft behalten.

Auflöſung.

Das geſuchte Quadrat ſei $=x^2$, alſo die Wurzel $=x$, die Zahl aber, welche man zu beiden addiren muß, ſei $=x^2$ mit einem ſolchen Coefficienten, daß ſie zu x^2

addirt, wieder ein Quadrat giebt, z. B. $3x^2$. Addirt man nun dieſe Zahl zu x^2, ſo erhält man das Quadrat $4x^2$, addirt man ſie aber zu x, ſo erhält man $3x^2+x$. Dieſe Summe ſoll nun der Wurzel von $4x^2$, d. i. der Zahl $2x$ gleich ſein; es iſt alſo

$$3x^2+x=2x, \text{ und } x=\frac{1}{3}.$$

Das geſuchte Quadrat iſt alſo $\frac{1}{9}$, ſeine Wurzel $\frac{1}{3}$, und die Zahl die man zu beiden addiren muß, $=\frac{3}{9}$.

V. Aufgabe.

Man ſoll zu einem Quadrat und zu ſeiner Wurzel dieſelbe Zahl addiren, und die entſtandenen Zahlen ſollen verwechſelt die vorige Eigenſchaft haben.

Auflöſung.

Das Quadrat ſei $=x^2$, die Wurzel alſo $=x$, die Zahl aber, welche man addiren muß, damit die vorige Wurzel ein Quadrat werde, ſei x^2 mit einem quadratiſchen Coefficienten, weniger der vorigen Wurzel, alſo z. B. $=4x^2-x$. Addire ich dieſe Zahl zu dem Quadrat, ſo erhalte ich $5x^2-x$, dies ſetze ich $=2x$, d. i. = der Wurzel des aus der vorigen Addition erhaltenen Quadrats. Man hat alſo

$$5x^2-x=2x, \text{ und } x=\frac{3}{5}.$$

Das geſuchte Quadrat iſt alſo $\frac{9}{25}$, ſeine Wurzel $= \frac{3}{5}$, und die Zahl die man addiren muß, iſt $\frac{21}{25}$.

VI. Aufgabe.

Man ſoll zu einem Cubus und zu einem Quadrat ein anderes Quadrat addiren, und beide Summen ſollen die vorige Eigenſchaft behalten.

Auflöſung.

Man ſetze den Cubus $= x^3$, das Quadrat aber $= x^2$ mit einem Coefficienten, der ebenfalls ein Quadrat iſt, z. B. $= 9x^2$. Da wir nun verlangen, daß ein gewiſſes Quadrat, wenn $9x^2$ dazu addirt wird, wieder ein Quadrat werde, ſo nehme man zwei Zahlen, welche 9 zu ihrem Produkte haben, z. B. 9 und 1. Wenn ich nun 1 von 9 abziehe, und die Hälfte des Reſtes ins Quadrat erhebe, ſo erhalte ich 16, und dieſe Zahl wird wieder ein Quadrat, wenn ich 9 dazu addire.

Ich ſetze alſo das Quadrat, welches zu beiden addirt werden ſoll, $= 16x^2$. Wenn ich dieſe Zahl zu $9x^2$ addire, ſo entſteht gewiß wieder ein Quadrat, wenn ich ſie aber zu x^3 addire, ſo erhalte ich $x^3 + 16x^2$, und dieſer Ausdruck ſoll ein Cubus ſein. Ich ſetze alſo

$$x^3 + 16x^2 = 8x^3, \text{ ſo wird } x = \frac{16}{7}.$$

Der geſuchte Cubus iſt alſo $\frac{4096}{343}$, das geſuchte Quadrat $\frac{2304}{49}$, das Quadrat aber, welches man zu beiden addiren muß, iſt $\frac{4096}{49}$.

VII. Aufgabe.

Man ſoll zu einem Cubus und zu einem Quadrat eine andere Quadratzahl addiren, und beide Summen ſollen verwechſelt die vorige Eigenſchaft haben.

Auflöſung.

Wir wollen den Cubus die erſte Zahl, das Quadrat die zweite Zahl, dasjenige Quadrat aber, welches man zu beiden addiren muß, die dritte Zahl nennen.

Da nun das Quadrat, welches man addiren muß, oder die dritte Zahl, mit dem erſten Quadrat oder der zweiten Zahl zuſammen genommen einen Cubus geben ſoll, ſo nehme ich an, die Summe beider gebe die erſte Zahl, ſo daß alſo die erſte Zahl die zweite um die dritte Zahl, alſo um ein Quadrat überſteigt; denn die dritte Zahl ſoll ja ein Quadrat ſein.

Wenn man nun zwei beliebige Zahlen nimmt, und zu der Summe ihrer Quadrate das doppelte Produkt beider addirt, ſo entſteht alle Mal ein Quadrat. Ich muß alſo zwei beliebige Zahlen nehmen, und die Summe

ihrer Quadrate als die erſte Zahl anſehen; denn die erſte Zahl ſoll zweien Quadraten, dem geſuchten und dem, welches nachher addirt wird, oder der zweiten und dritten Zahl gleich ſein; das doppelte Produkt beider Zahlen muß ich aber als die dritte Zahl anſehen.

Aber die dritte Zahl ſoll ein Quadrat ſein, d. h. das doppelte Produkt der beiden gewählten Zahlen muß ein Quadrat ſein. Man ſetze alſo die eine Zahl $=x$, die zweite $=2x$, damit ihr doppeltes Produkt ein Quadrat werde. Nun nehme ich die Summe ihrer Quadrate, und ſetze die erſte Zahl $=5x^2$, die dritte ſetze ich dem doppelten Produkt der beiden zuerſt gewählten Zahlen gleich, oder $=4x^2$, daher wird die zweite Zahl $=x^2$, weil ſie der Unterſchied der erſten und dritten Zahl ſein ſoll. Nun ſoll die erſte Zahl ein Cubus ſein, ich ſetze daher

$$5x^2 = x^3,\text{ ſo wird } x=5.$$

Der Cubus, oder die erſte Zahl iſt alſo 125, das Quadrat, oder die zweite Zahl iſt 25, das Quadrat aber, welches man addiren muß, oder die dritte Zahl iſt 100, und der Beweis fällt in die Augen.

VIII.

Eine andere Auflöſung der vorigen Aufgabe.

Man nenne den Cubus die erſte, das Quadrat die zweite, das Quadrat welches man addiren muß, die dritte Zahl.

Da

Da die Summe der beiden Quadrate, welche wir die dritte und die zweite Zahl genannt haben, ein Cubus ſein ſoll, ſo ſei dieſe Summe der erſten Zahl gleich. Da aber die Summe der erſten und der dritten Zahl ebenfalls ein Quadrat ſein ſoll, ſo kommt es zuerſt darauf an, zwei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß ihre Summe, um eine der Zahlen ſelbſt vergrößert, wieder ein Quadrat ſei; dann aber muß man zwei Quadrate, dasjenige nämlich, welches man zu der zweiten Zahl addiren ſoll, und die zweite Zahl ſelbſt, ſo beſtimmen, daß ihre Summe ein Cubus, oder der erſten Zahl gleich wird.

Man nehme alſo zwei Quadrate, x^2 und 4; wenn man nun zu der Summe beider noch das erſte addirt, ſo erhält man $2x^2+4$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel $= 2x-2$, ſo wird

$$2x^2+4=4x^2-8x+4, \text{ und } x=4.$$

Das eine der vorläufig geſuchten Quadrate iſt alſo 4, das andere 16.

Nunmehr ſetze ich das Quadrat, welches addirt werden ſoll, $=16x^2$, die zweite Zahl aber $=4x^2$, folglich wird die erſte Zahl $=20x^2$, weil ſie die Summe der zweiten und dritten Zahl ſein ſoll. Endlich ſetze man

$$20x^2=x^3, \text{ ſo wird } x=20.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 8000, die zweite 1600, das Quadrat, welches man addiren muß, iſt 6400. Die Aufgabe läßt aber unzählige Auflöſungen zu.

IX. Aufgabe.

Man ſoll zu einem Cubus und zu deſſen Wurzel dieſelbe Zahl addiren, und beide ſollen die nämliche Eigenſchaft behalten.

Auflöſung.

Die Zahl, welche man addiren muß, ſei $=x$, die Wurzel des geſuchten Cubus ein beliebiges Vielfaches von x, z. B. $=2x$, der Cubus ſelbſt alſo $=8x^3$. Wenn man nun x zu 2x addirt, ſo erhält man 3x, wenn man es aber zu $8x^3$ addirt, ſo erhält man $8x^3+x$. Nun iſt nach den Bedingungen der Aufgabe

$$27x^3 = 8x^3+x.$$

Man ziehe an beiden Seiten $8x^3$ ab, ſo bleibt

$$19x^3 = x,$$

und dividire beide Seiten durch x, ſo wird

$$19x^2 = 1.$$

Nun iſt 1 eine Quadratzahl, und wenn nun auch der Coefficient von x^2, nämlich 19 ein Quadrat wäre, ſo wäre die Gleichung aufgelöſ't. Aber die $19x^3$ entſtehen, indem man $8x^3$ von $27x^3$ abzieht; $27x^3$ iſt der Cubus von 3x, und $8x^3$ iſt der Cubus von 2x, die $19x^3$ ſind alſo aus dem Ueberſchuß des Cubi von 3x über den Cubus von 2x entſtanden. Aber 2x iſt eine bei dem Anſatz beliebig gewählte Größe, der Coefficient

3 aber iſt entſtanden, indem man zu dem beliebig gewählten Coefficienten von 2x noch 1 addirte.

Es kommt alſo darauf an, zwei um 1 verſchiedene Zahlen von der Beſchaffenheit zu finden, daß der Unterſchied ihrer Cubi eine Quadratzahl ſei. Man ſetze die eine dieſer Zahlen $=x$, die andere $=x+1$, ſo iſt der Unterſchied ihrer Cubi $3x^2+3x+1$. Man ſetze daher

$$3x^2+3x+1=(1-2x)^2=1-4x+4x^2,$$

ſo wird $x=7$, und die eine der vorläufig geſuchten Zahlen iſt 7, die andere 8.

Nun kehre ich zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, und ſetze die Zahl, welche man addiren muß $=x$, die Wurzel des geſuchten Cubi $=7x$, den Cubus ſelbſt alſo $=343x^3$. Wenn ich nun zu beiden x addire, ſo erhalte ich dort $8x$, und hier $343x^3+x$. Nun ſoll aber dieſe letztere Zahl ein Cubus, und $8x$ deren Kubikwurzel ſein. Man hat alſo die Gleichung

$$512x^3=343x^3+x, \text{ und } x=\frac{1}{13}.$$

Der geſuchte Cubus iſt alſo $\frac{343}{2197}$, ſeine Wurzel $\frac{7}{13}$, die Zahl, die man zu beiden addiren muß, $\frac{1}{13}$.

X. Aufgabe.

Man ſoll zu einem Cubus und zu deſſen Wurzel dieſelbe Zahl addiren, und beide Summen ſollen verwechſelt die vorige Eigenſchaft haben.

Aufloſung.

Der geſuchte Cubus ſei x^3, mit einem beliebigen kubiſchen Coefficienten z. B. $8x^3$, die Kubikwurzel ſei alſo $=2x$. Die Zahl, welche man zu beiden addiren muß, ſei wieder x^3 mit einem anderen kubiſchen Coefficienten, weniger der Wurzel des vorigen Cubus, z. B. $27x^3-2x$. Addirt man dieſe Zahl zu $2x$, ſo erhält man $27x^3$, und dies iſt der Cubus von $3x$, addirt man ſie aber zu $8x^3$, ſo erhält man $35x^3-2x$. Dies ſoll nun die Kubikwurzel der vorher erhaltenen $27x^3$, oder $=3x$ ſein. Man erhält alſo die Gleichung

$$35x^3-2x=3x, \text{ d. i. } 35x^3=5x,$$

oder, wenn man alles durch x dividirt,

$$35x^2=5.$$

Hier findet nun keine Aufloſung in rationalen Zahlen Statt, weil ſich die beiden Seiten der Gleichung nicht wie zwei Quadrate gegen einander verhalten. Aber der Coefficient von $35x^2$ iſt die Summe zweier Cubi, 27 und 8; die Zahl 5 aber iſt die Summe ihrer Wurzeln; es kommt alſo zuvörderſt darauf an, zwei Kubikzahlen von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß ihre Summe und die Summe ihrer Wurzeln ſich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten.

Man ſetze die Summe der Wurzeln einer beliebigen Zahl gleich z. B. $=2$; die Wurzel des erſten Cubus ſei $=x$, die des zweiten alſo $=2-x$, ſo iſt die

Summe der Cubi $= 6x^2 - 12x + 8$. Nun ſoll die Summe der Cubi zu der Summe der Wurzeln d. i. zu 2 ſich wie ein Quadrat zu einem andern verhalten. Aber 2 iſt das Doppelte eines Quadrats, daher muß auch $6x^2 - 12x + 8$ das Doppelte eines Quadrats, die Hälfte alſo oder $3x^2 - 6x + 4$ ein Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel $= 2 - 4x$, ſo wird $x = \frac{10}{13}$. Die eine Wurzel iſt alſo $\frac{10}{13}$, die andere $\frac{16}{13}$. Nun ſchaffe ich die Brüche weg, und nehme von beiden Zahlen die Hälfte, ſo werden 5 und 8 die geſuchten Wurzeln ſein.

Nunmehr komme ich wieder auf die urſprüngliche Aufgabe zurück, und ſetze die Wurzel des geſuchten Cubi $= 5x$, den Cubus alſo $= 125x^3$. Die Zahl, die man addiren muß, ſetze ich gleich dem Cubus von $8x$, weniger der Wurzel des vorigen Cubus, alſo $= 512x^3 - 5x$. Wenn ich dieſe Zahl zu $5x$ addire, ſo erhalte ich einen Cubus, wenn ich ſie aber zu $125x^3$ addire, ſo erhalte ich $637x^3 - 5x$. Dies ſoll nun die Kubikwurzel von $512x^3$ ſein; alſo iſt

$$637x^3 - 5x = 8x, \text{ folglich } x = \frac{1}{7}.$$

Der geſuchte Cubus iſt alſo $\frac{125}{343}$, ſeine Wurzel $\frac{5}{7}$, die Zahl, die man zu beiden addiren muß, iſt $\frac{267}{343}$.

XI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Kubikzahlen ſuchen, deren Summe der Summe ihrer Wurzeln gleich iſt.

Auflöſung.

Man drücke die Kubikwurzeln durch die unbekannte Zahl x aus, die eine ſei $= 2x$, die andere $= 3x$; ſo iſt die Summe der Cubi $= 35x^3$, und dies ſoll der Summe der Wurzeln, d. i. der Zahl $5x$ gleich ſein. Wenn man nun beides durch x dividirt, ſo hat man $35x^2 = 5$, und man erhält für x keinen rationalen Werth.

Aber der Coefficient von $35x^2$ iſt die Summe zweier Cubi, nämlich 8 und 27, und 5 iſt die Summe ihrer Wurzeln. Daher kommt es zuerſt darauf an: zwei Kubikzahlen zu finden, deren Summe, durch die Summe ihrer Wurzeln dividirt, zum Quotienten ein Quadrat giebt. Dieſe Aufgabe iſt aber ſchon gelöſ't worden, und die Wurzeln dieſer Cubi ſind 8 und 5.

Nunmehr kehre ich zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, und ſetze die Wurzeln der geſuchten Cubi $8x$ und $5x$, ſo wird die Summe der Cubi $= 637x^3$, und dies ſoll der Summe der Wurzeln oder der Zahl $13x$ gleich ſein. Man hat alſo

$$637x^3 = 13x, \text{ und } x = \frac{1}{7}.$$

Die Wurzel des erſten Cubi iſt alſo $\frac{5}{7}$, die des zweiten $\frac{8}{7}$, die Cubi ſelbſt aber ſind $\frac{125}{343}$ und $\frac{512}{343}$.

XII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Kubikzahlen ſuchen, deren Unterſchied dem Unterſchiede ihrer Wurzeln gleich iſt.

Aufloͤſung.

Wenn die Wurzeln der geſuchten Cubi $2x$ und $3x$ ſind, ſo iſt der Unterſchied der Cubi $= 19x^3$, der Unterſchied der Wurzeln aber iſt x, folglich wird $19x^3 = x$, und auch hier findet keine Aufloͤſung in rationalen Zahlen Statt, weil ſich die beiden Ausdruͤcke nicht wie zwei Quadrate gegen einander verhalten.

Es kommt alſo darauf an, zwei Kubikzahlen zu ſuchen, deren Unterſchied zu dem Unterſchiede ihrer Wurzeln ſich wie zwei Quadratzahlen verhalten. Die Wurzeln dieſer Cubi moͤgen x und $x+1$ ſein, damit auch der Unterſchied der Wurzeln ein Quadrat naͤmlich 1 ſei. Wenn aber die eine Wurzel x, die andere $x+1$ iſt, ſo iſt der Unterſchied der Wurzeln 1, aber der Unterſchied der Kubikzahlen ſelbſt iſt $3x^2+3x+1$. Nun ſoll ſich $3x^2+3x+1$ zu der Zahl 1, oder zu dem Unterſchiede der Wurzeln wie ein Quadrat zu einem anderen verhalten; daher muß das Produkt beider Zahlen ein Quadrat ſein. Das Produkt beider Zahlen iſt aber $3x^2+3x+1$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel $= 1-2x$, ſo iſt

$$4x^2-4x+1 = 3x^2+3x+1 \text{ und } x = 7.$$

Die geſuchten Cubi ſind alſo 343 und 512, und ihre Wurzeln ſind 7 und 8.

Nunmehr kehre ich zu der urſpruͤnglichen Aufgabe zuruͤck, und ſetze die Wurzeln der geſuchten Cubi $7x$

und $8x$; der Unterſchied der Wurzeln iſt alſo x, der Unterſchied ihrer Cubi aber $169x^3$. Man hat daher die Gleichung

$$169x^3 = x, \text{ und } x = \frac{1}{13}.$$

Die Wurzeln der geſuchten Cubi ſind alſo $\frac{7}{13}$ und $\frac{8}{13}$.

XIII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Cubus der größeren und die kleinere Zahl zuſammen genommen ſo groß ſind, als der Cubus der kleineren und die größere Zahl zuſammen genommen.

Auflöſung.

Die kleinere Zahl ſei $2x$, die größere $3x$. Wenn man nun zu dem Cubus der größeren Zahl die kleinere hinzulegt, ſo erhält man $27x^3 + 2x$, und wenn man zu dem Cubus der kleineren Zahl die größere hinzulegt, ſo erhält man $8x^3 + 3x$. Daher wird

$$27x^3 + 2x = 8x^3 + 3x.$$

Wenn man alles durch x dividirt, ſo erhält man $19x^2 = 1$, und man findet für x keinen rationalen Werth.

Aber der Coefficient von $19x^2$ iſt der Unterſchied zweier Cubi, und 1 iſt der Unterſchied ihrer Wurzeln.

Es kommt alſo zunächſt darauf an, zwei Kubikzahlen zu finden, deren Unterſchied zu dem Unterſchiede ihrer Wurzeln ſich wie zwei Quadratzahlen verhalten. Dieſe Aufgabe iſt aber ſchon gelöſ't worden, und die Wurzeln der geſuchten Cubi ſind 7 und 8.

Nunmehr komme ich auf die urſprüngliche Aufgabe zurück, und ſetze die eine Zahl $= 7x$, die andere $= 8x$, ſo wird

$$343x^3 + 8x = 512x^3 + 7x \text{ und } x = \frac{1}{13}.$$

Die eine der geſuchten Zahlen iſt alſo $\frac{7}{13}$, die andere $\frac{8}{13}$ und der Beweis fällt in die Augen.

XIV. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß jede der Zahlen für ſich, ferner die Summe und der Unterſchied von beiden ein Quadrat wird, wenn man noch 1 dazu addirt.

Auflöſung.

Wenn ich von irgend einem Quadrat 1 abziehe, ſo habe ich die erſte Zahl. Ich mache alſo das Quadrat von 1 und x mit einem beliebigen Coefficienten z. B. von $3x + 1$, das Quadrat iſt alſo $9x^2 + 6x + 1$, davon ziehe ich 1 ab, und ſetze die erſte Zahl $= 9x^2 + 6x$.

Da ferner die Summe von beiden, um 1 vergrößert, ein Quadrat werden, und auch die um 1 vergrö-

ßerte zweite Zahl ein Quadrat ſein ſoll, ſo kommt es zuerſt darauf an, ein Quadrat zu ſuchen, welches zu $9x^2+6x$ addirt wieder ein Quadrat zur Summe giebt. Ich nehme zwei Zahlen, deren Produkt $9x^2+6x$ iſt, z. B. $9x+6$ und x. Der Unterſchied dieſer Zahlen iſt $8x+6$, und die Hälfte davon $4x+3$, das Quadrat davon $16x^2+24x+9$; davon ziehe ich 1 ab, und ſetze die zweite Zahl $=16x^2+24x+8$. Die erſte Zahl aber war $9x^2+6x$, und jezt wird jede der Zahlen für ſich, und außerdem noch ihre Summe ein Quadrat werden, ſobald man noch 1 dazu addirt.

Nun ſoll aber auch der Unterſchied der beiden Zahlen, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werden, d. h. $7x^2+18x+9$ ſoll ein Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel $=3-3x$, ſo wird $x=18$.

Die erſte Zahl iſt alſo 3024, die zweite 5624, und der Beweis fällt in die Augen.

XV. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadratzahlen ſuchen, deren Summe der Summe ihrer Unterſchiede gleich ſei.

Auflöſung.

Die Aufgabe verlangt, daß der Unterſchied der größten und mittelſten, der mittelſten und kleinſten, und der größten und kleinſten Zahl der Summe von al-

len drei Zahlen gleich ſei. Aber die drei Unterſchiede zuſammen genommen ſind dem doppelten Unterſchiede der größten und kleinſten Zahl gleich, und daher iſt der doppelte Unterſchied der größten und kleinſten Zahl der Summe aller drei Zahlen gleich.

Man ſetze das kleinſte der drei geſuchten Quadrate $= 1$, das größte $= x^2 + 2x + 1$. Nun iſt der doppelte Unterſchied der größten und kleinſten Zahl $= 2x^2 + 4x$, daher iſt auch die Summe der drei Quadrate $= 2x^2 + 4x$; zwei davon ſind aber zuſammen genommen $= x^2 + 2x + 2$, alſo iſt das dritte $= x^2 + 2x - 2$, und dieſer Ausdruck ſoll alſo ein Quadrat ſein. Man ſetze die Wurzel $= x - 4$, ſo wird $x = \frac{9}{5}$.

Die größte Zahl iſt alſo $\frac{196}{25}$, die mittelſte $\frac{121}{25}$, die kleinſte 1, und wenn man alles mit 25 multiplicirt, ſo wird die erſte Zahl 196, die zweite 121, die dritte 25.

XVI. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe von je zweien, mit der dritten multiplicirt, eine vorgeſchriebene Zahl zum Produkt gebe.

Aufloſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß die Summe der erſten und zweiten Zahl, mit der dritten multiplicirt,

das Produkt 35, die Summe der zweiten und dritten, mit der erſten multiplicirt, das Produkt 27, die Summe der erſten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, das Produkt 32 gebe.

Man ſetze die dritte Zahl $= x$, ſo iſt die Summe der erſten und zweiten $= \frac{35}{x}$. Die erſte Zahl ſei $\frac{10}{x}$, ſo iſt die zweite $\frac{25}{x}$. Nun ſind aber noch zwei Bedingungen zu erfüllen, nämlich daß die Summe der zweiten und dritten, mit der erſten multiplicirt, das Produkt 27, und die Summe der erſten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, das Produkt 32 gebe. Aber die Summe der zweiten und dritten, mit der erſten multiplicirt, giebt zum Produkt $10 + \frac{250}{x^2}$, folglich iſt $10 + \frac{250}{x^2} = 27$. Die Summe der erſten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, giebt zum Produkt $25 + \frac{250}{x^2}$, folglich iſt $25 + \frac{250}{x^2} = 32$. Aber es iſt, wie wir geſehn haben, auch $10 + \frac{250}{x^2} = 27$. Nun iſt der Unterſchied $32 - 27 = 5$, und der Unterſchied $25 + \frac{250}{x^2} - (10 + \frac{250}{x^2})$ ſollte daher ebenfalls $= 5$, ſein. Aber die 25 kommen von dem Ausdruck für die zweite Zahl, die 10 von dem Ausdruck für die erſte Zahl her, und wir müſſen alſo dieſe Zahlen ſo wählen, daß ihr Unterſchied 5 ſei. Die erſte und zweite Zahl an ſich ſind aber nicht willkührlich, ſondern ihre Summe ſoll 35 ſein. Ich muß alſo 35 in zwei

Zahlen theilen, deren Unterſchied 5 iſt; die eine dieſer Zahlen iſt 15, die andere 20.

Nunmehr ſetze ich die erſte Zahl $= \frac{15}{x}$, die zweite $= \frac{20}{x}$. Nun giebt die Summe der zweiten und dritten, mit der erſten multiplicirt, das Produkt $15 + \frac{300}{x^2} = 27$, und die Summe der erſten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, das Produkt $20 + \frac{300}{x^2} = 32$. Nehme ich nun die Gleichung

$$15 + \frac{300}{x^2} = 27, \text{ ſo wird } x = 5.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 3, die zweite 4, die dritte 5.

XVII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe von allen dreien ein Quadrat ſei, und außerdem das Quadrat jedweder auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die nächſtfolgende Zahl dazu addirt.

Auflöſung.

Man ſetze die mittelſte Zahl $= x$ mit einem beliebigen Coefficienten, z. B. $= 4x$, und da nun verlangt wird, daß das Quadrat der erſten, wenn noch die mittelſte Zahl dazukommt, wieder ein Quadrat werden ſoll,

ſo muß ich zuerſt ein Quadrat ſuchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man $4x$ dazu addirt. Ich nehme zwei Zahlen, deren Produkt $4x$ iſt z. B. $2x$ und 2, und wenn ich nun den halben Unterſchied der Factoren für die erſte Zahl annehme, ſo wird die erſte Zahl $= x - 1$, und dadurch iſt ſchon die eine Bedingung erfüllt, daß das Quadrat der erſten auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die zweite Zahl dazu addirt.

Es ſoll aber auch das Quadrat der zweiten oder $16x^2$, wenn noch die dritte Zahl dazukommt, ein Quadrat werden. Wenn ich alſo von irgend einem Quadrat $16x^2$ abziehe, ſo erhalte ich die dritte Zahl. Ich mache ein Quadrat von 1 und der Wurzel von $16x^2$, alſo von $4x+1$; das Quadrat ſelbſt iſt $16x^2+8x+1$; ziehe ich davon alſo $16x^2$ ab, ſo iſt der Reſt $8x+1$ die dritte Zahl.

Nun ſoll auch noch die Summe aller drei Zahlen ein Quadrat ſein, die Summe der drei Zahlen iſt aber $13x$, und dieſe Zahl ſoll alſo ein Quadrat ſein. Man ſetze alſo $13x = x^2$ mit einem quadratiſchen Coefficienten, z. B. $13x = 169x^2$, ſo wird $x = 13x^2$, und nunmehr wird die erſte Zahl $= 13x^2 - 1$, die zweite $= 52x^2$, die dritte $= 104x^2 + 1$, und jetzt ſind drei Bedingungen der Aufgabe in unbeſtimmten Ausdrücken erfüllt.

Endlich ſoll das Quadrat der dritten Zahl nämlich $10815x^4 + 208x^2 + 1$ ein Quadrat werden, wenn man die erſte Zahl oder $13x^2 - 1$ dazu addirt. Dieſe

Summe aber wird $= 10816x^4 + 221x^2$, und dieſer Ausdruck ſoll ein Quadrat ſein. Man dividire alles durch x^2, ſo muß auch der Quotient $10816x^2 + 221$ ein Quadrat ſein. Die Wurzel ſei $= 104x + 1$, ſo wird $x = \frac{55}{52}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{36621}{2704}$, die zweite $\frac{157300}{2704}$, die dritte $\frac{317304}{2704}$.

XVIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihre Summe ein Quadrat ſei, und außerdem das Quadrat jedweder auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die zunächſt folgende Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Man ſetze wieder die mittelſte Zahl $= 4x$. Da nun das Quadrat der erſten auch dann noch ein Quadrat bleiben ſoll, wenn man die zweite davon abzieht, ſo muß ich zuerſt ein Quadrat ſuchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man $4x$ davon abzieht. Ich ſuche zuerſt zwei Zahlen, deren Produkt $4x$ iſt, z. B. $2x$ und 2. Nun nehme ich die halbe Summe der Faktoren, und ſetze die erſte Zahl $= x + 1$, ſo iſt die eine Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Es ſoll ferner das Quadrat der zweiten Zahl oder $16x^2$ auch dann noch ein Quadrat bleiben, wenn man die dritte Zahl davon abzieht. Ich ziehe alſo von $16x^2$ irgend ein Quadrat ab, ſo giebt der Reſt mir die dritte Zahl. Ich nehme z. B. das Quadrat von $4x-1$ d. i. $16x^2-8x+1$, dies ziehe ich von $16x^2$ ab, ſo wird die dritte Zahl $=8x-1$, und nun ſind zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Ferner ſoll die Summe der drei Zahlen oder $13x$ ein Quadrat ſein. Ich ſetze alſo $13x=169x^2$, ſo wird $x=13x^2$, und daher verwandelt ſich die erſte Zahl in $13x^2+1$ die zweite in $52x^2$, die dritte in $104x^2-1$, und nun ſind in allgemeinen Ausdrücken bereits drei Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Endlich ſoll auch das Quadrat der dritten Zahl, wenn man die erſte davon abzieht, ein Quadrat ſein. Aber wenn man von dem Quadrat der dritten Zahl die erſte abzieht, ſo erhält man $10816x^4-221x^2$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Man dividire alles durch x^2, ſo muß auch der Quotient $10816x^2-221$ ein Quadrat ſein. Man ſetze die Wurzel $=4x-1$, ſo wird $x=\frac{111}{104}$.

Die erſte Zahl wird alſo $\frac{170989}{10816}$, die zweite $\frac{640692}{10816}$, die dritte $\frac{1270568}{10816}$.

XIX. Auf-

XIX. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Cubus der erſten und die zweite wieder einen Cubus, das Quadrat der zweiten und die erſte wieder ein Quadrat zu ihrer Summe haben.

Auflöſung.

Man ſetze die erſte Zahl $= x$, ſo muß die zweite eine beſtimmte Kubikzahl weniger x^3 z. B. $8 - x^3$ ſein; wenn nun zu dem Cubus der erſten die zweite Zahl addirt wird, ſo iſt die Summe wieder ein Cubus.

Nun ſoll auch das Quadrat der zweiten und die erſte Zahl wieder ein Quadrat zu ihrer Summe geben. Aber wenn man zu dem Quadrat der zweiten Zahl die erſte addirt, ſo erhält man $x^6 - 16x^3 + x + 64$, und dieſe Zahl ſoll ein Quadrat ſein. Man ſetze die Wurzel $= x^3 + 8$, ſo hat man die Gleichung

$$x^6 - 16x^3 + x + 64 = x^6 + 16x^3 + 64.$$

Wenn man nun an beiden Seiten die fehlenden Größen addirt, und Gleiches von Gleichem abzieht, ſo erhält man $32x^3 = x$, und wenn man durch x dividirt, $32x^2 = 1$.

Nun iſt 1 eine Quadratzahl, wäre alſo auch $32x^2$ eine Quadratzahl, ſo könnte die Gleichung gelöſt werden. Aber die $32x^2$ ſind aus dem Doppelten von $16x^3$

entſtanden; die $16x^3$ ſelbſt ſind das doppelte Produkt von 8 und x^3, alſo iſt $32x^2$ aus dem Vierfachen der Zahl 8 entſtanden. Es kommt alſo darauf an, ſtatt der Zahl 8 einen Cubus zu ſuchen, deſſen Vierfaches ein Quadrat iſt. Dieſer Cubus ſei $=x^3$, das Vierfache deſſelben $=4x^3$, und dieſe Zahl ſoll ein Quadrat ſein. Es ſei alſo $4x^3=16x^2$, ſo wird $x=4$, und der geſuchte Cubus 64.

Nunmehr ſetze ich die zweite Zahl $64-x^3$, und nun ſoll das Quadrat der zweiten Zahl und die erſte zuſammen genommen wieder ein Quadrat geben. Wenn man aber zu dem Quadrat der zweiten Zahl die erſte addirt, ſo erhält man $x^6-128x^3+x+4096$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Man ſetze die Wurzel $=x^3+64$, ſo wird

$$x^6-128x^3+x+4096=x^6+128x^3+4096.$$

Hieraus findet man $256x^3=x$, und $x=\frac{1}{16}$. Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{1}{16}$, die zweite $\frac{262143}{4096}$.

XX. Aufgabe.

Man ſoll in allgemeinen Ausdrücken drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man noch 1 dazu addirt.

Auflöſung.

Zuerſt ſoll das Produkt der erſten und zweiten Zahl ein Quadrat werden, wenn man noch 1 dazu addirt; wenn ich alſo von irgend einem Quadrat 1 abziehe, ſo habe ich das Produkt der erſten und zweiten Zahl. Ich mache alſo das Quadrat von x mit einem beliebigen Coefficienten und 1, z. B. von $x+1$. Das Quadrat iſt x^2+2x+1; davon ziehe ich 1 ab, ſo iſt der Reſt x^2+2x das Produkt der erſten und zweiten Zahl. Die zweite Zahl ſelber ſei $=x$, ſo iſt die erſte Zahl $=x+2$.

Es ſoll ferner das Produkt der zweiten und dritten Zahl ein Quadrat werden, wenn man 1 dazu addirt; wenn ich alſo wieder von einem beliebigen Quadrate 1 abziehe, ſo habe ich das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Ich mache das Quadrat von $3x+1$, dieſes wird $9x^2+6x+1$, und wenn ich davon 1 abziehe, ſo iſt der Reſt $9x^2+6x$ das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Die zweite Zahl war aber $=x$, folglich wird die dritte Zahl $=9x+6$ ſein.

Da endlich das Produkt der erſten und dritten Zahl, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werden ſoll, ſo muß $9x^2+24x+13$ ein Quadrat ſein. Das Glied, worin x^2 vorkommt, iſt bereits ein Quadrat, wenn nun auch die beſtimmte Zahl 13 ein Quadrat, und $24x$ das doppelte Produkt aus der Wurzel von x^2 und von 13 wäre,

ſo wären die drei Bedingungen bereits in unbeſtimmten Zahlen erfüllt.

Aber die 13 entſtehen, indem ich 2 mit 6 multiplicire, und 1 dazu addire; die 2 entſteht ferner, indem ich das Produkt $x \times 1$ verdoppele, und die 6 entſteht, indem ich das Produkt $3x \times 1$ verdoppele. Ich will alſo, daß der doppelte Coefficient von x in der einen Wurzel, mit dem doppelten Coefficienten von x in der anderen multiplicirt, ein Produkt gebe, das um 1 vermehrt, ein Quadrat wird. Aber das Produkt der verdoppelten Coefficienten iſt das vierfache Produkt der Coefficienten ſelber, und ich will alſo, daß dies Vierfache um 1 vermehrt ein Quadrat werde.

Aber wenn man das vierfache Produkt zweier beliebigen Zahlen nimmt, und dazu das Quadrat ihres Unterſchiedes addirt, ſo erhält man alle Mal ein Quadrat. Wenn ich alſo das Quadrat des Unterſchiedes = 1 ſetze, ſo wird das vierfache Produkt gewiß ein Quadrat werden, wenn man noch 1 dazu addirt. Aber wenn das Quadrat des Unterſchiedes 1 iſt, ſo iſt der Unterſchied ſelbſt ebenfalls 1, und wir müſſen daher die Quadrate ſo bilden, daß die Coefficienten von x um 1 verſchieden ſind, nämlich von $x+1$ und $2x+1$.

Das Quadrat von $x+1$ iſt $= x+2x+1$, zieht man davon 1 ab, ſo bleibt x^2+2x, daher muß das Produkt der erſten und zweiten Zahl x^2+2x ſein. Man ſetze die zweite Zahl $= x$, ſo wird die erſte $= x+2$.

Das Quadrat von $2x+1$ iſt $4x^2+4x+1$; zieht man davon 1 ab, ſo bleibt $4x^2+4x$, alſo muß das Produkt der zweiten und dritten Zahl $=4x^2+4x$ ſein. Aber die zweite Zahl war x, folglich iſt die dritte Zahl $=4x+4$.

Und ſo iſt in unbeſtimmten Ausdrücken die Aufgabe gelöſ't, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man 1 dazu addirt, wobei man für x jeden beliebigen Zahlenwerth ſetzen kann; denn das heißt eben eine Aufgabe in unbeſtimmten Ausdrücken oder in allgemeinen Zahlen löſen, wenn der allgemeine Ausdruck für eine Zahl (ὑπόστασις) ſo beſchaffen iſt, daß, welchen beſtimmten Werth man auch für die unbekannte Größe annehmen und dem allgemeinen Ausdruck anpaſſen mag, die Bedingungen der Aufgabe doch immer erfüllt werden.

XXI. Aufgabe.

Man ſoll vier Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man noch 1 dazu addirt.

Auflöſung.

Zuerſt ſoll das Produkt der erſten und zweiten Zahl, wenn ich 1 dazu addire, ein Quadrat werden; wenn ich alſo von einem beliebigen Quadrat 1 abziehe, ſo wird

$9x^2+24x+13$, und dies ſoll auch ein Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel $=3x-4$, ſo wird $x=\frac{1}{16}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{1}{16}$, die zweite $\frac{33}{16}$, die dritte $\frac{68}{16}$, die vierte $\frac{195}{16}$.

XXII. Aufgabe.

Man ſoll drei proportionale Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied von je zweien ein Quadrat wird.

Aufloͤſung.

Man ſetze die erſte Zahl $=x$, die mittelſte $=x+4$, damit der Unterſchied ein Quadrat ſei; die dritte Zahl aber ſei $=x+13$, damit auch der Unterſchied der zweiten und dritten ein Quadrat ſei. Wenn nun der Unterſchied der groͤßten und kleinſten auch ein Quadrat waͤre, ſo wuͤrde ſchon in allgemeinen Ausdruͤcken dem Theil der Aufgabe genuͤgt, welcher verlangt, daß der Unterſchied von je zweien der geſuchten Zahlen ein Quadrat ſei.

Aber der Unterſchied der groͤßten und kleinſten Zahl iſt 13, die Zahl 13 aber iſt die Summe zweier Quadrate, 4 und 9. Ich muß alſo zuerſt zwei Quadrate ſuchen, deren Summe wieder ein Quadrat wird; dies erreicht man aber ſehr leicht, wenn man die Seiten eines

rechtwinkligen Dreiecks nimmt, und ſolche Zahlen ſind z. B. 9 und 16.

Ich ſetze daher die erſte Zahl $= x$, die zweite $= x + 9$, die dritte $= x + 16$, ſo iſt der Unterſchied von je zweien ein Quadrat.

Nun iſt noch übrig, daß die drei Zahlen proportional ſein ſollen. Wenn aber drei Zahlen proportional ſind, ſo iſt das Produkt der beiden äußeren dem Quadrat der mittelſten gleich; das Produkt der beiden äußeren iſt $= x^2 + 25x$, und das Quadrat der mittelſten $= x^2 + 18x + 81$, folglich iſt

$$x^2 + 25x = x^2 + 18x + 81, \text{ und } x = \frac{81}{7}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{81}{7}$, die zweite $\frac{144}{7}$, die dritte $\frac{256}{7}$.

XXIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die körperliche Zahl, welche ſie bilden, oder das Produkt von allen dreien ein Quadrat wird, wenn man jedwede der drei Zahlen dazu addirt.

Auflöſung.

Man ſetze das Produkt der drei Zahlen $= x^2 + 2x$, und die erſte Zahl ſei 1, ſo wird das Produkt der drei

Zahlen ein Quadrat, wenn man die erſte dazu addirt. Nun ſoll das Produkt der drei Zahlen auch ein Quadrat werden, wenn man die zweite dazu addirt; wenn ich alſo von einem beliebigen Quadrate das Produkt x^2+2x abziehe, ſo habe ich die zweite Zahl. Ich mache das Quadrat von $x+3$, und wenn ich davon x^2+2x abziehe, ſo bleibt $4x+9$, ich ſetze alſo die zweite Zahl $=4x+9$.

Da nun das Produkt der drei Zahlen $=x^2+2x$, das Produkt der erſten und zweiten aber $4x+9$ ſein ſoll, ſo erhalte ich die dritte Zahl, wenn ich x^2+2x durch $4x+9$ dividire. Dieſe Diviſion iſt nicht möglich; damit ſie aber möglich werde, muß man es dahin bringen, daß ſich verhalte $x^2:4x=2x:9$, oder verwechſelt $x^2:2x=4x:9$. Nun iſt x^2, wenn wir bloß auf den Coefficienten ſehen, die Hälfte von $2x$, und wenn alſo $4x$ auch die Hälfte von 9 wäre, ſo ließe ſich die Diviſion bewerkſtelligen.

Die $4x$ ſind entſtanden, indem ich $2x$ von $6x$ abzog, $6x$ aber iſt das doppelte Produkt von x und der Zahl 3, oder der Coefficient 6 iſt das Doppelte der Zahl 3; die 9 aber iſt das Quadrat der Zahl 3. Es kommt alſo darauf an, ſtatt der Zahl 3 eine andere von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß das Doppelte derſelben, wenn man 2 davon abzieht, die Hälfte von ihrem Quadrate ſei. Die geſuchte Zahl ſei x; wenn man nun

von dem Doppelten derſelben 2 abzieht, ſo hat man $2x-2$, ihr Quadrat aber iſt x^2; wir ſetzen alſo

$$2x-2=\frac{1}{2}x^2, \text{ oder } 4x-4=x^2,$$

und es wird $x=2$.

Nunmehr kehre ich zu der urſprünglichen Aufgabe zurück. Wir hatten die erſte Zahl $=1$, das Produkt aller drei Zahlen $=x^2+2x$ geſetzt. Nun ſoll das Produkt der drei Zahlen auch dann ein Quadrat werden, wenn man die zweite Zahl dazu addirt; wenn ich alſo von irgend einem Quadrate x^2+2x abziehe, ſo habe ich die zweite Zahl. Ich mache daher das Quadrat von x und einer Zahl, die ſo beſchaffen iſt, daß ihr Doppeltes weniger 2 die Hälfte ihres Quadrates ſei; wir haben aber ſchon gezeigt, daß 2 dieſe Eigenſchaft habe. Ich mache alſo das Quadrat von $x+2$, dies giebt x^2+4x+4; davon ziehe ich das Produkt der drei Zahlen nämlich x^2+2x ab, ſo iſt die zweite Zahl $=2x+4$.

Wenn ich nun das Produkt der drei Zahlen durch das Produkt der erſten und zweiten oder durch $2x+4$ dividire, ſo erhalte ich die dritte Zahl $=\frac{1}{2}x$.

Endlich ſoll das Produkt der drei Zahlen auch dann noch ein Quadrat werden, wenn man die dritte Zahl dazu addirt. Aber wenn man die dritte Zahl zu dem Produkte aller drei Zahlen addirt, ſo erhält

man $x^2 + 2\frac{1}{2}x$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Man ſetze

$$x^2 + 2\frac{1}{2}x = 4x^2, \text{ ſo wird } x = \frac{5}{6}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{6}{6}$, die zweite $\frac{31}{6}$, die dritte $\frac{2\frac{1}{2}}{6} = \frac{5}{12}$.

XXIV. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht.

Auflöſung.

Man ſetze die erſte Zahl $= x$, das Produkt aller drei Zahlen $= x^2 + x$, ſo wird dies Produkt ein Quadrat, wenn man die erſte der drei Zahlen davon abzieht. Wenn aber $x^2 + x$ das Produkt der drei Zahlen, und x die erſte dieſer Zahlen iſt, ſo iſt $x + 1$ das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Die zweite Zahl ſei 1; ſo iſt die dritte Zahl $= x + 1$.

Nun ſoll das Produkt der drei Zahlen auch noch ein Quadrat bleiben, ſo wohl, wenn man die zweite als wenn man die dritte davon abzieht. Zieht man die zweite Zahl ab, ſo ſoll $x^2 + x - 1$ ein Quadrat ſein, zieht man aber die dritte Zahl ab, ſo ſoll $x^2 - 1$ ein Quadrat ſein. Hier findet alſo wieder die doppelte

Gleichung Statt. Ich nehme den Unterſchied beider Zahlen, welcher x iſt, und ſuche zwei Zahlen, welche x zu ihrem Produkte haben, nämlich die Faktoren $\frac{1}{2}$ und 2x, von denen der letztere die doppelte Wurzel von x^2 iſt. Hieraus ſetzt man die Gleichung an, wie ſchon früher gezeigt iſt, und es wird $x = \frac{17}{8}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{17}{8}$, die zweite 1, die dritte $\frac{25}{8}$.

XXV. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in zwei andere von der Beſchaffenheit theilen, daß ihr Produkt der Unterſchied zwiſchen einem Cubus und ſeiner Wurzel werde.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 6, die erſte der geſuchten Zahlen $= x$, die zweite alſo $= 6 - x$. Das Produkt dieſer Zahlen ſoll der Unterſchied eines Cubus und ſeiner Wurzel ſein; dies Produkt iſt aber $6x - x^2$, und dies ſoll dadurch entſtehen, daß man von einem Cubus die Wurzel deſſelben abzieht.

Ich mache den Cubus von x mit beliebigem Coefficienten, weniger 1, z. B. von $2x - 1$. Wenn ich von

dem Cubus dieſer Zahl ſeine Wurzel abziehe, ſo erhalte ich $8x^3 - 12x^2 + 4x$, und dies giebt die Gleichung

$$8x^3 - 12x^2 + 4x = 6x - x^2.$$

Wenn nun x an beiden Seiten gleiche Coefficienten hätte, ſo bliebe an der einen Seite der Gleichung nur der Cubus, an der andern Seite nur das Quadrat der unbekannten Größe, und der Werth x von ließe ſich in rationalen Zahlen finden.]

Aber die 4x entſtehen, indem man 2x von $3 \times 2x$ abzieht; wenn man aber 2x von $3 \times 2x$ abzieht, ſo bleibt $2 \times 2x$. Die Zahl 6 aber iſt eine in der Aufgabe vorgeſchriebene Zahl. Ich muß alſo ſtatt 2x eine andere Zahl ſuchen, deren doppelter Coefficient 6 iſt, und eine ſolche Zahl iſt 3x.

Damit alſo $6x - x^2$ der Unterſchied eines Cubi und ſeiner Wurzel werde, ſetze ich die Wurzel des Cubi $= 3x - 1$. Wenn ich nun von dem Cubus dieſer Zahl die Wurzel ſelbſt wieder abziehe, ſo erhalte ich $27x^3 - 27x^2 + 6x$; dies giebt die Gleichung

$$27x^3 - 27x^2 + 6x = 6x - x^2, \text{ und } x = \frac{26}{27}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{26}{27}$, die zweite $\frac{136}{27}$.

XXVI. Aufgabe.

Man ſoll eine vorgeſchriebene Zahl in drei andere Zahlen von der Beſchaffenheit theilen, daß

das Produkt aus allen dreien eine Kubikzahl wird, welche die Summe der Unterſchiede zwiſchen je zweien zu ihrer Wurzel hat.

Aufloͤſung.

Die gegebene Zahl ſei 4, und da das Produkt von allen dreien eine Kubikzahl ſein ſoll, ſo ſei $4 = 8x^3$, alſo die Kubikwurzel $= 2x$. Nun iſt der Unterſchied der erſten und zweiten, der zweiten und dritten und der erſten und dritten Zahl, dem doppelten Unterſchiede zwiſchen der erſten und dritten gleich, d. h. wenn man drei ungleiche Zahlen hat, ſo iſt die Summe der Unterſchiede zwiſchen je zweien dem doppelten Unterſchiede der beiden aͤußerſten gleich. Nun haben wir bei dem Anſatz die Wurzel des Cubus $= 2x$ genommen, daher muß $2x$ die Summe der Unterſchiede, und der Unterſchied der erſten und dritten Zahl $= x$ ſein. Man ſetze fuͤr die erſte Zahl x mit einem beliebigen Coefficienten z. B. $2x$, ſo iſt die dritte Zahl $= 3x$, und da das Produkt aus allen drei Zahlen $= 8x^3$ ſein ſoll, das Produkt der erſten und dritten aber $= 6x^2$ iſt, ſo muß die zweite Zahl $= 1\frac{1}{3}x$ ſein.

Waͤre nun die zweite Zahl kleiner als die dritte und groͤßer als die erſte Zahl, ſo waͤre die Aufgabe geloͤſ't. Aber der Coefficient der zweiten Zahl entſtand, indem wir 8 durch das Produkt der erſten und dritten Zahl

dividirten. Die erſte und dritte Zahl ſind aber nicht willkührlich gewählt, ſondern ihr Unterſchied mußte 1 ſein. Es kommt alſo darauf an, daß wir zwei um 1 verſchiedene Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn man 8 durch das Produkt beider dividirt, der Quotient kleiner werde als die größere, aber größer als die kleinere der beiden Zahlen.

Ich ſetze alſo die kleinere Zahl $=x$, ſo iſt die größere $=x+1$, und wenn ich nun 8 durch das Produkt beider oder durch x^2+x dividire, ſo iſt der zwiſchen beiden liegende Quotient $\frac{8}{x^2+x}$. Dieſer Quotient ſoll alſo größer als x, aber kleiner als $x+1$ ſein. Da nun der Unterſchied der erſten und zweiten Zahl kleiner ſein muß als 1, ſo wird die zweite Zahl, wenn man 1 dazu addirt, größer als die erſte Zahl ſein. Wenn man aber zu der zweiten Zahl 1 addirt, dieſe 1 aber in einen Bruch von dem Nenner x^2+x verwandelt, ſo erhält man $\frac{x^2+x+8}{x^2+x}$. Dieſe Zahl iſt alſo größer als $x+1$, und wenn man beides mit dem Nenner x^2+x multiplicirt, ſo wird x^2+x+8 größer als x^3+2x^2+x.

Endlich ziehe man Gleiches von Gleichem ab, ſo findet man, daß 8 größer ſein muß als x^3+x^2.

Jetzt mache ich einen Cubus, in welchem x^3+x^2 vorkommt, die Wurzel deſſelben wird alſo $=x+\frac{1}{3}$ ſein. Nun iſt 8 größer als x^3+x^2, eben ſo iſt auch der

Cubus von $x+\frac{1}{3}$ größer als x^3+x^2. Wenn wir alſo die Wurzeln 2 und $x+\frac{1}{3}$ gleich ſetzen, ſo wird $x=\frac{5}{3}$.

Die erſte Zahl wird alſo $\frac{8}{3}$, die zweite $\frac{9}{5}$, die dritte $\frac{5}{3}$ ſein, und wenn man alles mit 15 multiplicirt, ſo iſt die erſte Zahl 40, die zweite 27, die dritte 25, denn durch die Multiplication ſchafft man die Brüche weg, und die gefundenen Zahlen haben die Eigenſchaft, daß das Produkt aus allen dreien eine Kubikzahl iſt, welche die Summe ſämmtlicher Unterſchiede zu ihrer Wurzel hat.

Nunmehr ſetze ich die erſte Zahl $=40x$, die zweite $=27x$, die dritte $=25x$, ſo iſt das Produkt aller drei Zahlen gewiß eine Kubikzahl, und die Summe aller Unterſchiede iſt die Wurzel derſelben. Nun ſoll aber auch die Summe der drei Zahlen der gegebenen Zahl 4 gleich ſein, alſo iſt

$$92x=4, \text{ und } x=\frac{1}{23}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{40}{23}$, die zweite $\frac{27}{23}$, die dritte $\frac{25}{23}$.

XXVII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Cubus wird, wenn man jedwede der beiden Zahlen dazu addirt.

Auf-

Auflöſung.

Ich ſetze die erſte Zahl $=x$ mit irgend einem kubiſchen Coefficienten z. B. $=8x$, die zweite Zahl aber ſetze ich $=x^2-1$, ſo wird die eine der beiden Bedingungen erfüllt, denn das Produkt beider Zahlen wird ein Cubus, wenn man die erſte der beiden Zahlen dazu addirt.

Nun ſoll eben dieſes Produkt auch dann noch ein Cubus werden, wenn man die zweite Zahl dazu addirt. Wenn man aber zu dieſem Produkte die zweite Zahl addirt, ſo erhält man $8x^3+x^2-8x-1$, und dieſer Ausdruck ſoll ein Cubus ſein. Ich nehme $2x-1$ als die Wurzel an, ſo wird

$$8x^3+x^2-8x-1 = 8x^3-12x^2+6x-1,$$

$$\text{und } x = \frac{14}{13}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{112}{13}$, die zweite $\frac{27}{169}$.

XXVIII. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Cubus wird, wenn man jedwede der beiden Zahlen davon abziehe.

Auflöſung.

Man ſetze die erſte Zahl, wie in der vorigen Aufgabe, $= 8x$, die zweite $= x^2 + 1$, ſo wird das Produkt beider eine Kubikzahl, wenn man die erſte der beiden Zahlen davon abzieht. Aber wenn man von dem Produkte beider Zahlen die zweite Zahl abzieht, ſo erhält man $8x^3 + 8x - x^2 - 1$, und dies ſoll ebenfalls ein Cubus ſein.

Da dies unmöglich iſt, ſo ſetze ich die erſte Zahl wieder $= x$ mit irgend einem kubiſchen Coefficienten, und addire dazu 1, die erſte Zahl ſei alſo $= 8x + 1$, die zweite $= x^2$, ſo wird das Produkt beider ein Cubus, wenn man die zweite Zahl davon abzieht; wenn man aber von eben dieſem Produkte die erſte Zahl abzieht, ſo erhält man $8x^3 + x^2 - 8x - 1$, und dies ſoll ein Cubus ſein. Ich ſetze die Wurzel $= 2x - 1$, ſo wird $x = \frac{14}{13}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{125}{13}$, die zweite $\frac{196}{169}$.

XXIX. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Cubus wird, man mag die Summe der Zahlen dazu addiren, oder davon abziehen.

Aufloſung.

Wenn man zu dem Produkt beider Zahlen die Summe derſelben addirt, ſo ſoll man eine Kubikzahl erhalten, dieſe Kubikzahl ſei 64; und wenn man von dem Produkt beider Zahlen die Summe derſelben abzieht, ſo ſoll wieder eine Kubikzahl entſtehen, dieſe Kubikzahl ſei 8. Nun iſt die doppelte Summe der Zahlen dem Unterſchiede dieſer Kubikzahlen gleich, oder $=56$, die Summe der Zahlen alſo $=28$. Wenn aber das Produkt beider Zahlen und ihre Summe zuſammen genommen 64 giebt, ſo muß das Produkt beider Zahlen 36 ſein. Es kommt alſo darauf an, zwei Zahlen zu ſuchen, deren Summe 28, und deren Produkt 36 iſt. Man ſetze die größere der beiden Zahlen $=x+14$, ſo iſt die kleinere $14-x$, und nun ſoll das Produkt beider Zahlen, nämlich $196-x^2=36$ ſein, und man erhält alſo $x^2=160$.

Wäre nun 160 ein Quadrat, ſo wäre die Aufgabe gelöſ't. Aber 160 iſt der Reſt, wenn man 36 von 196 abzieht, 196 iſt das Quadrat von 14, und 14 die Hälfte von 28; daher iſt 196 das Quadrat der Hälfte von 28. Die Zahl 28 iſt die Hälfte von 56, und daher iſt 14 der vierte Theil von 56. Ferner iſt 56 der Unterſchied der Kubikzahlen 64 und 8, 36 aber die Hälfte von der Summe beider Cubi. Es kommt alſo darauf an, zwei Kubikzahlen von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß, wenn man den vierten Theil ihres Unterſchiedes ins Quadrat erhebt, und von dieſem Qua-

drat die halbe Summe der beiden Kubikzahlen abzieht, der Reſt ein Quadrat wird.

Man ſetze die Wurzel des gröſsern Cubus $= x + 1$, die des kleinern $= x - 1$, der gröſsere Cubus iſt alſo $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, der kleinere $x^3 + 3x - 3x^2 - 1$, der vierte Theil von dem Unterſchiede dieſer Cubi $1\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, und das Quadrat davon $2\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$. Zieht man davon die halbe Summe der Cubi, nämlich $x^3 + 3x$ ab, ſo bleibt $2\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} - x^3 - 3x$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Um die Brüche wegzuſchaffen, multiplicire man den ganzen Ausdruck mit 4, ſo erhält man $9x^4 + 6x^2 + 1 - 4x^3 - 12x$, und dieſer Ausdruck muſs auch ein Quadrat ſein. Man nehme $3x^2 + 1 - 6x$ als Wurzel an, ſo iſt das Quadrat ſelbſt $9x^4 + 42x^2 + 1 - 36x^3 - 12x$. Man hat alſo die Gleichung

$$9x^4 + 6x^2 + 1 - 4x^3 - 12x = 9x^4 + 42x^2 + 1 - 36x^3 - 12x.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Gröſsen, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$32x^3 = 36x^2 \text{ und } x = \frac{9}{8}.$$

Nun hatte ich die Wurzel des erſten Cubus $= x + 1$, die des zweiten $= x - 1$ geſetzt, jene iſt alſo $\frac{17}{8}$, dieſe $\frac{1}{8}$, und die Cubi ſelbſt ſind $\frac{4913}{512}$ und $\frac{1}{512}$.

Nunmehr komme ich wieder auf die urſprüngliche Aufgabe, und unterſuche, wie man zwei Zahlen von der Beſchaffenheit findet, daß ihr Produkt $\frac{4913}{512}$ macht, wenn man die Summe derſelben dazu addirt, $\frac{1}{512}$ dagegen, wenn man die Summe der Zahlen davon abzieht. Da nun das Produkt dieſer Zahlen $\frac{4913}{512}$ giebt, wenn man die Summe der Zahlen dazu addirt, $\frac{1}{512}$ dagegen, wenn man die Summe der Zahlen davon abzieht, ſo iſt der Unterſchied dieſer Cubi, nämlich $\frac{4912}{512}$ die doppelte Summe der Zahlen, die Summe ſelbſt alſo $\frac{2456}{512}$. Das Produkt und die Summe der Zahlen zuſammen genommen giebt $\frac{4913}{512}$, die Summe iſt, wie wir gefunden haben $\frac{2456}{512}$, alſo iſt das Produkt der beiden Zahlen $\frac{2457}{512}$. Das fernere Verfahren iſt zwar ſchon in dem erſten Buche gezeigt worden, wir wollen es aber noch in Beziehung auf die vorliegende Aufgabe entwickeln. Man ſetze die erſte Zahl $= x$ und der Hälfte derjenigen Zahl, welche die Summe beider Zahlen ausdrückt, alſo $= x + \frac{1228}{512}$, ſo iſt die andere Zahl $\frac{1228}{512} - x$; die Summe dieſer beiden Ausdrücke iſt wirklich $= \frac{1228}{512}$, ihr Produkt aber iſt $\frac{1507984}{262144} - x^2$. Man hat alſo die Gleichung

$$\frac{1507984}{262144} - x^2 = \frac{2456}{512}.$$

Man multiplicire beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner 262144, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo wird

$$262144x^2 = 250000, \text{ und } x = \frac{500}{512}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{1728}{512}$, die zweite $\frac{728}{512}$, und der Beweis fällt in die Augen.

XXX. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Cubus wird, man mag die Summe der Zahlen dazu addiren oder davon abziehen.

Auflöſung.

Bei dieſer Aufgabe wendet man folgenden Satz an: wenn man ein Quadrat in zwei Stücke theilt, nämlich in die Wurzel und den Reſt, ſo wird das Produkt dieſer Zahlen immer ein Cubus, wenn man die Summe der beiden Zahlen dazu addirt. Man nehme alſo ein Quadrat $= x^2$, und theile es in ſeine Wurzel und den Reſt, alſo in x und $x^2 - x$, ſo wird das Produkt beider Zahlen, wenn man die Summe beider dazu addirt, eine Kubikzahl geben.

Nun ſoll eben dieſes Produkt, wenn man die Summe der Zahlen davon abzieht, ebenfalls eine Kubikzahl geben, man erhält durch dieſe Rechnung aber $x^3 - 2x^2$,

und dies ſoll ein Cubus ſein, der kleiner als x^3 ſein muß. Ich mache den Cubus von $\frac{1}{2}x$, dieſer iſt $\frac{1}{8}x^3$, und ſetze

$$x^3 - 2x^2 = \frac{1}{8}x^3,$$

oder, wenn ich alles mit 8 multiplicire,

$$8x^3 - 16x^2 = x^3, \text{ alſo } x = \frac{16}{7}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{16}{7}$, die zweite $\frac{144}{49}$.

XXXI. Aufgabe.

Man ſoll vier Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe der Zahlen und die Summe ihrer Wurzeln zuſammen genommen eine vorgeſchriebene Zahl gebe.

Auflöſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 12. Wenn man zu einem Quadrat noch ſeine Wurzel und $\frac{1}{4}$ addirt, ſo erhält man alle Mal ein Quadrat, und wenn man von der Wurzel deſſelben $\frac{1}{2}$ abzieht, ſo erhält man die Wurzel des erſten Quadrats. Die vier geſuchten Quadrate und ihre Wurzeln zuſammen genommen geben 12, wenn man aber zu jedem dieſer Quadrate noch außer-

dem $\frac{1}{4}$ addirt, ſo geben ſie die Summe von vier Quadraten. Wenn man aber zu 12 noch vier Mal $\frac{1}{4}$ oder im Ganzen 1 hinzulegt, ſo erhält man 13. Ich muß alſo 13 in vier Quadrate theilen, und wenn ich dann von der Wurzel eines jeden Quadrats $\frac{1}{2}$ abziehe, ſo habe ich die Wurzeln der vier geſuchten Quadrate.

Die Zahl 13 beſteht aus zwei Quadraten 4 und 9, jedes derſelben theile ich wieder in zwei Quadrate, das erſte in $\frac{64}{25}$ und $\frac{36}{25}$, das zweite in $\frac{144}{25}$ und $\frac{81}{25}$. Nun nehme ich die Wurzel jedes dieſer Quadrate, nämlich $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$ und $\frac{9}{5}$, und ziehe von jeder $\frac{1}{2}$ ab, ſo erhalte ich die Wurzeln der geſuchten Quadrate $\frac{11}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{19}{10}$, $\frac{13}{10}$. Die geſuchten Quadrate ſelbſt ſind alſo $\frac{121}{100}$, $\frac{49}{100}$, $\frac{361}{100}$ und $\frac{169}{100}$.

XXXII. Aufgabe.

Man ſoll vier Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied zwiſchen der Summe dieſer Quadrate und der Summe ihrer Wurzeln eine vorgeſchriebene Zahl gebe.

Aufloͤſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 4, und nun verlange ich, daß die Unterſchiede zwiſchen dem erſten Quadrat und deſſen Wurzel, dem zweiten Quadrat und deſſen Wurzel, ferner zwiſchen dem dritten und vierten Quadrat und deren Wurzel, zuſammen genommen die Zahl 4 geben. Wenn man aber von einem Quadrat deſſen Wurzel abzieht, und $\frac{1}{4}$ dazu addirt, ſo erhaͤlt man wieder ein Quadrat, und wenn man zu der Wurzel deſſelben $\frac{1}{2}$ addirt, ſo erhaͤlt man die Wurzel des erſten Quadrats. Wenn man alſo von den vier geſuchten Quadraten ihre Wurzeln abzieht, und vier Mal $\frac{1}{4}$ oder 1 dazu addirt, ſo erhaͤlt man die Summe von vier Quadraten. Wenn man aber von den geſuchten Quadraten ihre Wurzeln abzieht, ſo iſt die Summe der Unterſchiede 4, und wenn man 1 dazu addirt, ſo erhaͤlt man 5.

Es kommt alſo darauf an, die Zahl 5 in vier Quadrate zu theilen, und wenn ich zu den Wurzeln der einzelnen Quadrate $\frac{1}{2}$ addire, ſo erhalte ich die Wurzeln der geſuchten Quadrate. Die Zahl 5 beſteht aber aus den vier Quadraten $\frac{9}{25}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{36}{25}$, $\frac{64}{25}$. Nun nehme ich die Wurzeln dieſer Quadrate $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$, und ad-

dire zu jeder Wurzel $\frac{1}{2}$, ſo finde ich die Wurzeln der geſuchten Quadrate $\frac{11}{10}$, $\frac{13}{10}$, $\frac{17}{10}$, $\frac{21}{10}$; die geſuchten Quadrate ſind alſo $\frac{121}{100}$, $\frac{169}{100}$, $\frac{289}{100}$ und $\frac{441}{100}$.

XXXIII. Aufgabe.

Man ſoll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stück eine gegebene Zahl addiren, und das Produkt beider ſoll ein Quadrat ſein.

Auflöſung.

Es ſei alſo vorgeſchrieben, daß man 1 in zwei Stücke theilen, zu dem einen Stücke 3, zu dem anderen 5 addiren, und daß das Produkt der ſo entſtandenen Zahlen ein Quadrat werden ſolle.

Man ſetze das erſte Stück $= x$, ſo iſt das zweite $= 1 - x$; wenn ich nun zu dem erſten Stücke 3 addire, ſo kommt $x + 3$, und wenn ich zu dem zweiten 5 addire, ſo kommt $6 - x$; das Produkt dieſer beiden Zahlen aber iſt $3x + 18 - x^2$, und da dies ein Quadrat ſein ſoll, ſo ſetze man

$$3x + 18 - x^2 = 4x^2.$$

Nun addire man an beiden Seiten die fehlenden Größen, ſo wird

$$3x + 18 = 5x^2,$$

und es findet keine Auflöſung in rationalen Zahlen Statt.

Aber $5x^2$ hat zum Coefficienten eine um 1 vergrößerte Quadratzahl; dieſe muß alſo, mit 18 multiplicirt, und um das Quadrat des halben Coefficienten von $3x$ oder um $2\frac{1}{4}$ vergrößert, ein Quadrat geben. Ich muß daher ſtatt der Zahl 4 ein Quadrat ſuchen, welches, um 1 vergrößert, dann mit 18 multiplicirt, und um $2\frac{1}{4}$ vergrößert, wieder ein Quadrat wird. Dies Quadrat ſei $=x^2$. Wenn man dazu 1 addirt, dann mit 18 multiplicirt, und $2\frac{1}{4}$ dazu addirt, ſo erhält man $18x^2+20\frac{1}{4}$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Man multiplicire aber mit 4, ſo muß auch $72x^2+81$ ein Quadrat ſein. Ich nehme $8x+9$ als Wurzel dieſes Quadrats an, ſo wird $x=18$, und das geſuchte Quadrat 324.

Nunmehr komme ich wieder auf die urſprüngliche Aufgabe, und ſetze

$$3x+18-x^2=324x^2,$$

ſo wird $x=\frac{78}{325}=\frac{6}{25}$. Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{6}{25}$, die zweite $\frac{19}{25}$.

XXXIV. Aufgabe.

Man ſoll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stück eine vorgeſchriebene Zahl addiren, und das Produkt der dadurch entſtehenden Zahlen ſoll ein Quadrat ſein.

Auflöſung.

Es ſei alſo vorgeſchrieben, daß man die Zahl 1 in zwei Stücke theile, zu dem einen 3, zu dem anderen 5 addire, und daß das Produkt der ſo entſtandenen Zahlen ein Quadrat ſein ſolle.

Man ſetze die erſte Zahl $= x - 3$, weil man nachher 3 zu derſelben addiren ſoll, ſo wird die zweite Zahl $4 - x$ ſein. Addire ich nun zu der erſten Zahl 3, ſo erhalte ich x^2, addire ich aber zu der zweiten 5, ſo erhalte ich $9 - x$, und das Produkt beider Zahlen wird $= 9x - x^2$. Da dies ein Quadrat ſein ſoll, ſo ſetze man

$$9x - x^2 = 4x^2, \text{ ſo wird } x = \frac{9}{5}.$$

Wenn ich dieſen Werth von x in die allgemeinen Ausdrücke für beide Stücke von 1 ſetzen will, ſo kann ich 3 nicht von x abziehen; ſondern der Werth von x muß größer als 3 und kleiner als 4 ſein. Nun erhält man den Werth von x, wenn man 9 durch 5 dividirt, wo der Diviſor ein um 1 vergrößertes Quadrat iſt. Wenn aber 9, durch das um 1 vergrößerte Quadrat dividirt, einen Quotienten geben ſoll, der größer als 3 iſt, ſo muß der Diviſor kleiner als 3 ſein. Der Diviſor iſt ein um 1 vergrößertes Quadrat, folglich muß das um 1 vergrößerte Quadrat kleiner als 3, und wenn man alſo 1 davon abzieht, ſo muß das Quadrat ſelbſt kleiner als 2 ſein.

Da wir ferner verlangen, daß der Quotient kleiner als 4 ſei, ſo muß der Diviſor größer als $2\frac{1}{4}$ ſein. Der Diviſor iſt aber ein um 1 vergrößertes Quadrat, folglich muß das um 1 vergrößerte Quadrat größer als $2\frac{1}{4}$, und wenn man 1 abzieht, ſo muß das Quadrat ſelbſt größer als $1\frac{1}{4}$ ſei. Wir haben aber ſchon gezeigt, daß es kleiner als 2 ſein müſſe, und es kommt alſo darauf an, daß ich ein Quadrat ſuche, welches größer als $1\frac{1}{4}$, und kleiner als 2 iſt. Ich verwandele beide Zahlen in Brüche, deren Nenner ein Quadrat z. B. 64 iſt, und erhalte $\frac{80}{64}$ und $\frac{128}{64}$; nun iſt die Sache leicht, denn es iſt z. B. $\frac{100}{64}$ oder $\frac{25}{16}$ ein Quadrat von der verlangten Beſchaffenheit.

Jetzt kehre ich zu der urſprünglichen Aufgabe zurück; ich ſuchte nämlich, wie $9x - x^2$ ein Quadrat werden könne. Ich ſetze es dem vorhin gefundenen Quadrat gleich, alſo iſt

$$\frac{25}{16}x^2 = 9x - x^2, \text{ und } x = \frac{144}{25}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{21}{41}$, die zweite $\frac{20}{41}$.

XXXV. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in drei Zahlen von der Beſchaffenheit theilen, daß das Produkt

der erſten und zweiten ein Quadrat wird, man mag die dritte Zahl davon abziehen oder dazu addiren.

Aufloͤſung.

Die gegebene Zahl ſei 6; nun ſetze man die dritte der geſuchten Zahlen $= x$, fuͤr die zweite nehme man eine beliebige Zahl, welche kleiner als 6 iſt, z. B. 2, ſo iſt die dritte Zahl $= 4 - x$. Nun ſind noch zwei Bedingungen uͤbrig, naͤmlich, daß das Produkt der erſten und zweiten Zahl ein Quadrat werde, ſowohl wenn man die dritte Zahl dazu addirt, als wenn man die dritte Zahl davon abzieht.

Hier hat man nun wieder die doppelte Gleichung, denn ſowohl $8 - x$, als $8 - 3x$ ſoll ein Quadrat ſein. Die Gleichung laͤßt ſich aber nicht aufloͤſen, weil die Coefficienten von x ſich nicht wie zwei Quadrate gegen einander verhalten. Aber der Coefficient von x iſt um 1 kleiner als die willkuͤhrlich angenommene Zahl 2, und der Coefficient von $3x$ iſt um 1 groͤßer als eben dieſe Zahl 2. Es kommt alſo darauf an, ſtatt der Zahl 2 eine andere Zahl von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß die um 1 groͤßere Zahl zu der um 1 kleineren Zahl ſich wie ein Quadrat zu einem anderen verhalte.

Ich ſetze die geſuchte Zahl $= x$, die um 1 groͤßere iſt alſo $x + 1$, und die um 1 kleinere iſt $x - 1$, und nun ſollen ſich dieſe beiden Zahlen wie zwei Quadrate, z. B.

wie 4 : 1 verhalten. Wenn ich $x-1$ mit 4 multiplicire, ſo iſt das Produkt $4x-4$, und wenn ich $x+1$ mit 1 multiplicire, ſo iſt das Produkt $x+1$. Wenn nun die beiden Zahlen $x+1$ und $x-1$ ſich wie die beiden Quadrate oder wie 4 : 1 verhalten, ſo iſt

$$4x-4=x+1, \text{ und } x=\frac{5}{3}.$$

Ich ſetze nunmehr die zweite Zahl $=\frac{5}{3}$, die dritte aber iſt $=x$, folglich die erſte $=\frac{13}{3}-x$. Nun müſſen wir noch die beiden Bedingungen erfüllen, nämlich daß das Produkt der erſten und zweiten Zahl ein Quadrat wird, man mag die dritte dazu addiren, oder davon abziehen. Wenn man aber zu dem Produkt der beiden erſten Zahlen die dritte addirt, ſo erhält man $\frac{65}{9}-\frac{2}{3}x$, und dies ſoll ein Quadrat ſein; wenn man aber von eben dieſem Produkte die dritte Zahl abzieht, ſo erhält man $\frac{65}{9}-\frac{8}{3}x$, und dies ſoll auch ein Quadrat ſein. Man multiplicire beide Ausdrücke mit 9, ſo müſſen $65-6x$ und $65-24x$ Quadrate ſein. Ich multiplicire die erſte Gleichung mit 4, damit in beiden x gleiche Coefficienten erhält, ſo ſollen $260-24x$ und $65-24x$ Quadrate ſein. Ich nehme nun den Unterſchied beider Quadrate, dieſer iſt 195; dieſen Unterſchied zerfälle ich in die beiden Faktoren 15 und 13. Das Quadrat des halben Unterſchiedes ſetze ich dem kleineren Ausdruck gleich, ſo wird $x=\frac{8}{3}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{5}{3}$, die zweite $\frac{5}{3}$, die dritte $\frac{8}{3}$, und der Beweis fällt in die Augen.

XXXVI. Aufgabe.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn die eine von der anderen denſelben aliquoten Theil, oder dieſelben aliquoten Theile erhält, die Summe zu dem Reſt in beiden Fällen ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß die erſte Zahl, wenn ſie von der zweiten einen oder mehre aliquote Theile erhält, das Dreifache des Reſtes, die zweite aber, wenn ſie von der erſten denſelben aliquoten Theil oder dieſelben aliquoten Theile erhält, das Fünffache des Reſtes werde.

Man ſetze die zweite Zahl $= x + 1$, der aliquote Theil aber, oder die aliquoten Theile, die ſie abgeben ſoll, mögen 1 ſein, ſo iſt die erſte Zahl $= 3x - 1$, denn auf dieſe Weiſe wird die erſte Zahl das Dreifache der zweiten, nachdem ſie von der zweiten einen oder mehre aliquote Theile, deren Werth $= 1$ iſt, erhalten hat.

Nun ſoll aber auch die zweite Zahl das Fünffache von dem Reſte der erſten Zahl werden, wenn ſie von dieſer

dieſer denſelben aliquoten Theil oder dieſelben aliquoten Theile erhalten hat. Die Summe beider Zahlen iſt $4x$, nun ſoll die zweite etwas erhalten, was die erſte abgiebt, und dann ſoll die Summe das Fünffache des Reſtes ſein; eben dieſe Summe und der Reſt müſſen daher noch immer $= 4x$ ſein, wir werden alſo den Reſt der erſten Zahl erhalten, wenn wir das Sechstel von $4x$ oder $\frac{2}{3}x$ nehmen. Wenn wir alſo $\frac{2}{3}x$ von $3x - 1$ abziehen, ſo erhalten wir den aliquoten Theil oder die aliquoten Theile, welche die erſte Zahl abgiebt. Wenn wir aber dieſe Subtraction vollziehen, ſo erhalten wir $\frac{7}{3}x - 1$, und dies iſt der aliquote Theil oder die aliquoten Theile, welche die erſte Zahl an die zweite abgiebt, denn wenn die zweite Zahl von der erſten $\frac{7}{3}x - 1$ erhält, ſo wird ſie das Fünffache von dem Reſte der erſten Zahl.

Nun müſſen wir noch unterſuchen, ob $\frac{7}{3}x - 1$ derſelbe aliquote Theil oder dieſelben aliquoten Theile von $3x - 1$ ſind, welcher 1 von $x + 1$ iſt. Wenn man dies aber bewirken will, ſo muß man das Produkt der Faktoren $(\frac{7}{3}x - 1) \times (x + 1)$ und das Produkt $(3x - 1) \times 1$ einander gleich ſetzen, d. h. man muß jede der beiden Zahlen mit dem aliquoten Theil der andern multipliciren. Auf dieſe Weiſe erhält man aber

$$\frac{7}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1 = 3x - 1, \text{ und } x = \frac{5}{7}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{8}{7}$, die zweite $\frac{12}{7}$; nun ſollte 1 der aliquote Theil der zweiten Zahl ſein, wir wollen alſo ſuchen, was für ein Theil von der zweiten Zahl 1 ſein werde; ſie iſt $\frac{7}{12}$. Nun multiplicire ich beide Zahlen mit 7, ſo wird die erſte Zahl 8, und die zweite 12, und die aliquoten Theile ſollen $\frac{7}{12}$ von jeder Zahl betragen. Da aber die erſte Zahl ſich nicht durch 12 ohne Reſt theilen läßt, ſo multiplicire ich beide Zahlen nochmals mit 3, damit ich nicht Brüche erhalte, und nun wird die erſte Zahl 24, die zweite 36, die aliquoten Theile aber, oder $\frac{7}{12}$ der erſten ſind 14, $\frac{7}{12}$ der zweiten aber 21, und der Beweis fällt in die Augen.

XXXVII. Aufgabe.

Man ſoll in unbeſtimmten Ausdrücken zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt und die Summe beider Zahlen zuſammen genommen eine vorgeſchriebene Zahl geben.

Auflöſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 8. Man ſetze die erſte der geſuchten Zahlen $=x$, die zweite ſei 3, ſo giebt das

Produkt mit der Summe beider zuſammen genommen $4x+3$. Man hat alſo die Gleichung

$$4x+3=8,\text{ und } x=\frac{5}{4}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{5}{4}$, die zweite 3. Nunmehr überlege ich, woher x den Werth $\frac{5}{4}$ erhalten hat; offenbar dadurch, daß ich 5 durch 4 dividirt habe. Aber 5 iſt der Reſt, wenn ich 3 von 8 abziehe, und 4 iſt die um 1 vergrößerte zweite Zahl. Wenn ich alſo die zweite Zahl willkührlich nehme, ſie von 8 abziehe, und den Reſt durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl dividire, ſo erhalte ich die erſte. Z. B. die zweite Zahl ſei $x-1$; ich ziehe ſie von 8 ab, ſo bleibt $9-x$, den Reſt dividire ich durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl, oder durch x, ſo wird die erſte Zahl $\frac{9-x}{x}$, und ſo iſt die Aufgabe in unbeſtimmten Ausdrücken gelöſ't, denn das Produkt beider Zahlen mit der Summe derſelben zuſammen genommen, giebt 8. Eine Aufgabe heißt aber in unbeſtimmten Ausdrücken gelöſ't, wenn man für x jeden beliebigen Zahlenwerth ſetzen kann.

XXXVIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Produkte von je zweien, wenn noch die Summe der beiden Zahlen dazu kommt,

vorgeſchriebenen Zahlen gleich werden. Die gegebenen Zahlen müſſen aber um 1 verkleinerte Quadratzahlen ſein.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß das Produkt der erſten und zweiten Zahl nebſt der Summe beider die Zahl 8, das Produkt der zweiten und dritten nebſt der Summe beider die Zahl 15, endlich das Produkt der erſten und zweiten nebſt der Summe beider die Zahl 24 geben ſolle.

Zuerſt ſoll das Produkt der erſten und zweiten Zahl nebſt der Summe beider die Zahl 8 geben; wenn ich nun die zweite Zahl ganz beliebig wähle, ſie von 8 abziehe und den Reſt durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl dividire, ſo habe ich die erſte Zahl. Die zweite Zahl ſei $x-1$, wenn ich dieſe von 8 abziehe und den Reſt durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl dividire, ſo wird die erſte Zahl $= \frac{9}{x} - 1$.

Es ſoll ferner das Produkt der zweiten und dritten nebſt der Summe beider die Zahl 15 geben. Ich ziehe alſo wieder $x-1$ von 15 ab, und dividire den Reſt durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl oder durch x, ſo erhalte ich $\frac{16}{x} - 1$, und das iſt die dritte Zahl.

Endlich ſoll auch das Produkt der erſten und drit-

ten nebſt der Summe beider die Zahl 24 geben, es giebt aber $\frac{144}{x^2}-1$; man hat alſo die Gleichung:

$$\frac{144}{x^2}-1=24, \text{ und } x=\frac{12}{5}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{33}{12}$, die zweite $\frac{7}{5}$, die dritte $\frac{68}{12}$, und wenn man alle drei Zahlen auf denſelben Nenner bringt, ſo wird die erſte $\frac{165}{60}$, die zweite $\frac{84}{60}$, die dritte $\frac{240}{60}$.

XXXIX. Aufgabe.

Man ſoll einen allgemeinen Ausdruck für zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt einer vorgeſchriebenen Zahl gleich wird, wenn man die Summe der beiden Zahlen davon abzieht.

Auflöſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 8. Man ſetze die erſte Zahl $=x$, die zweite $=3$; wenn man nun von dem Produkt dieſer Zahlen die Summe derſelben abzieht, ſo erhält man $2x-3$. Es iſt alſo

$$2x-3=8, \text{ und } x=5\tfrac{1}{2}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $5\frac{1}{2}$, die zweite 3. Nun überlege ich wieder, wie x den Werth $5\frac{1}{2}$ erhalten hat;

und dritten die Zahl 15, das Produkt der erſten und dritten die Zahl 24 gebe, wenn man in jedem Falle die Summe der beiden Faktoren davon abzieht.

Zuerſt ſoll das Produkt der erſten und zweiten die Zahl 8 geben, wenn man die Summe beider davon abzieht. Wenn ich die zweite Zahl beliebig wähle, dazu die vorgeſchriebene Zahl 8 addire, und die Summe durch die um 1 verminderte zweite Zahl dividire, ſo habe ich nach dem vorhergehenden Lehnſatz die erſte Zahl. Die zweite Zahl ſei alſo $= x+1$, dazu addire ich 8; dies giebt $x+9$. Dieſe Summe dividire ich durch die um 1 verminderte zweite Zahl oder durch x, ſo erhalte ich $1+\frac{9}{x}$, und dies iſt die erſte Zahl. Auf dieſelbe Art finde ich aber die dritte Zahl $= 1+\frac{16}{x}$, und ſo ſind bereits zwei Bedingungen erfüllt.

Nun ſoll auch noch das Produkt der erſten und dritten die Zahl 24 geben, wenn man die Summe der beiden Faktoren davon abzieht. Man erhält alſo die Gleichung

$$\frac{144}{x^2}-1=24, \text{ und } x=\frac{12}{5}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{57}{12}$, die zweite $\frac{17}{5}$, die dritte $\frac{92}{12}$; will man aber überall gleiche Nenner haben, ſo verwandele man den Nenner in 60; dann wird die erſte Zahl $\frac{285}{60}$, die zweite $\frac{204}{60}$, die dritte $\frac{460}{60}$ ſein.

XLI. Aufgabe.

Man ſoll einen allgemeinen Ausdruck für zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt zu ihrer Summe ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß das Produkt das Dreifache der Summe ſein ſolle. Man ſetze die erſte Zahl $=x$, die zweite ſei $=5$, ſo iſt ihr Produkt $5x$, und dies ſoll das Dreifache von $x+5$ ſein, daher iſt

$$5x = 3x + 15, \text{ und } x = 7\tfrac{1}{2}.$$

Nun überlege ich, wie x den Werth $7\frac{1}{2}$ erhalten hat, nämlich dadurch, daß ich 15 durch 2 dividirte. Aber 15 iſt ein Vielfaches der zweiten Zahl, und ſteht zu dieſer in dem vorgeſchriebenen Verhältniß. Dagegen iſt 2 der Unterſchied der zweiten Zahl und des Exponenten des Verhältniſſes. Wenn wir alſo die zweite Zahl beliebig wählen, ſie mit dem Exponenten des vorgeſchriebenen Verhältniſſes multipliciren, und das Produkt mit dem Unterſchiede zwiſchen der zweiten Zahl und dem gegebenen Exponenten dividiren, ſo erhalten wir die erſte Zahl. Die zweite Zahl ſei z. B. $=x$, dieſe multiplicire ich mit dem Exponenten des Verhältniſſes, giebt $5x$.

Wenn ich dies nun durch den Unterſchied zwiſchen der zweiten Zahl und dem gegebenen Exponenten oder mit $x-3$ dividire, ſo wird die erſte Zahl $=\frac{3x}{x-3}$.

XLII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien zu der Summe derſelben ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß das Produkt der erſten und zweiten das Dreifache, das Produkt der zweiten und dritten das Vierfache, das Produkt der erſten und dritten das Fünffache von der Summe der jedesmaligen Faktoren ſein ſolle.

Man ſetze die zweite Zahl $=x$, ſo iſt die erſte nach dem vorhergehenden Lehnſatz $=\frac{3x}{x-3}$, die dritte aber nach eben dieſem Verfahren $=\frac{4x}{x-4}$. Nun ſoll auch das Produkt der erſten und dritten das Fünffache von der Summe beider ſein. Aber das Produkt der erſten und dritten iſt $\frac{12x^2}{x^2-7x+12}$, die Summe beider Zahlen aber iſt $\frac{7x^2-24x}{x^2-7x+12}$. Dieſe Summe findet man ſo.

Man ſoll zwei Brüche addiren, nämlich $\frac{3x}{x-3}$ und $\frac{4x}{x-4}$, man multiplicirt daher beide Zahlen mit den verwechſelten Nennern, nämlich $3x$ mit dem Nenner des andern Bruches oder mit $x-4$, und $4x$ mit dem Nenner des andern Bruchs oder mit $x-3$, und ſo entſteht die Summe $7x^2-24$, welche das Produkt beider Nenner oder $x^2-7x+12$ zu ihrem Nenner hat. Das Produkt der erſten und dritten Zahl war $\frac{12x^2}{x^2-7x+12}$, alſo iſt $\frac{12x^2}{x^2-7x+12}$ das Fünffache der Summe, folglich iſt die fünffache Summe dem Produkte gleich, oder

$$\frac{35x^2-120x}{x^2-7x+12}=\frac{12x^2}{x^2-7x+12}.$$

Man multiplicire beide Seiten der Gleichung mit dem gemeinſchaftlichen Nenner $x^2-7x+12$, ſo erhält man

$$35x^2-120x = 12x^2, \text{ und } x=\frac{120}{23}.$$

Die erſte Zahl war $\frac{3x}{x-5}$, die zweite x, die dritte $\frac{4x}{x-4}$, und der Werth von x iſt $\frac{120}{23}$. Setzt man dieſen Werth in den Zähler der erſten Zahl oder in $3x$, ſo erhält man $\frac{360}{23}$, ſetzt man ihn aber in den Nenner $x-3$, ſo erhält man $\frac{51}{23}$, die erſte Zahl wird alſo $\frac{360}{51}$; die zweite Zahl bleibt aber $\frac{120}{23}$, denn ſie hat keinen Nenner den man erſt berechnen müßte; aber die dritte wird wie

die erſte berechnet. Denn man ſetze den Werth $\frac{120}{23}$ in den Zähler $4x$, ſo erhält man $\frac{480}{23}$, auf gleiche Weiſe ſetze man ihn in den Nenner $x-4$, ſo wird derſelbe $\frac{28}{23}$, und die dritte Zahl ſelbſt $\frac{480}{28}$. Der Beweis aber fällt in die Augen.

XLIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien zu der Summe aller drei Zahlen ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß das Produkt der erſten und zweiten das Dreifache, das Produkt der zweiten und dritten das Vierfache, das Produkt der erſten und dritten das Fünffache von der Summe aller drei Zahlen ſei.

Da das Produkt von je zweien zu der Summe aller drei Zahlen ein vorgeſchriebenes Verhältniß haben ſoll, ſo ſuche ich zuerſt drei Zahlen von der Beſchaffenheit, daß das Produkt von je zweien zu einer willkührlich gewählten Zahl das vorgeſchriebene Verhältniß hat; dieſe willkührliche Zahl ſei 5. Da nun das Produkt der

erſten und zweiten Zahl das Dreifache der willkührlichen Zahl 5 ſein ſoll, ſo iſt das Produkt der erſten und zweiten Zahl 15; die zweite Zahl ſei nun $=x$, ſo iſt die erſte $=\frac{15}{x}$. Da ferner das Produkt der zweiten und dritten das Vierfache von 5 ſein ſoll, ſo iſt das Produkt der zweiten und dritten Zahl 20, die zweite Zahl aber war $=x$, folglich iſt die dritte $=\frac{20}{x}$. Nun ſoll auch noch das Produkt der erſten und dritten oder $\frac{300}{x^2}$ das Fünffache von 5 ſein, folglich wird $25x^2 = 300$.

Wenn nun die beiden Ausdrücke ſich wie zwei Quadrate gegen einander verhielten, ſo wäre die Aufgabe gelöſ't. Aber 300 iſt das Produkt von 15 und 20, 15 iſt aber das Dreifache von 5, und 20 das Vierfache eben dieſer Zahl 5. Wir verlangen alſo, daß, wenn man das Dreifache und das Vierfache der Zahl 5 mit einander multiplicirt, dies Produkt zu dem Fünffachen der Zahl 5 ſich wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhalte. Aber die Zahl 5 iſt willkührlich gewählt, es kommt alſo darauf an, eine Zahl von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß das Produkt ihres Dreifachen und Vierfachen ſich zu dem Fünffachen eben dieſer Zahl wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhalte. Die geſuchte Zahl ſei $=x$, das Dreifache und Vierfache derſelben mit einander multiplicirt, giebt $12x^2$, dies ſoll ſich alſo zu dem Fünffachen derſelben Zahl wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhalten, oder $12x^2$ ſoll zu $5x$ ſich wie ein Quadrat zu einem

Quadrat verhalten. Wenn ich alſo die eine Zahl mit der andern multiplicire, ſo muß das Produkt ein Quadrat ſein, alſo muß $60x^3$ ein Quadrat ſein. Es ſei alſo

$$60x^3 = 900x^2, \text{ alſo } x = 15.$$

Die geſuchte Zahl iſt alſo 15, und dieſe ſetze ich jetzt ſtatt der willkührlichen Zahl 5. Nun iſt das Produkt der erſten und zweiten Zahl 45, die zweite Zahl war $=x$, folglich iſt die erſte $=\frac{45}{x}$, und auf dieſelbe Weiſe findet man die dritte $=\frac{60}{x}$. Nun ſoll auch das Produkt der erſten und dritten d. i. $\frac{2700}{x^2}$ das Fünffache von 15 ſein. Es iſt alſo

$$\frac{2700}{x^2} = 75, \text{ und } x = 6.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $7\frac{1}{2}$, die zweite 6, die dritte 10, und wenn nun die Summe dieſer drei Zahlen 15 wäre, ſo wäre die ganze Aufgabe gelöſ't.

Ich ſetze nun die Summe der drei geſuchten Zahlen $=15x^2$, die drei geſuchten Zahlen ſelbſt drücke ich durch x aus, und gebe ihnen die vorhin gefundenen Zahlen zu Coefficienten, die erſte ſei alſo $=7\frac{1}{2}x$, die zweite $=6x$, die dritte $=10x$. Nun ſoll die Summe der drei Zahlen $15x^2$ ſein, ſie iſt aber auch $23\frac{1}{2}x$, daher hat man die Gleichung

$$15x^2 = 23\frac{1}{2}x, \text{ und } x = \frac{47}{30}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{352\frac{1}{2}}{30}$, die zweite $\frac{282}{30}$, die dritte $\frac{470}{30}$.

XLIV. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt aus ihrer Summe in die erſte eine dreieckige Zahl, das Produkt der Summe in die zweite Zahl ein Quadrat, das Produkt der Summe in die dritte Zahl einen Cubus gebe.

Auflöſung.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen $= x^2$, die erſte aber ſei ein quadratiſcher Bruch, deſſen Zähler eine dreieckige Zahl iſt, z. B. $\frac{6}{x^2}$, die zweite ſei ein quadratiſcher Bruch, deſſen Zähler eine Quadratzahl iſt, z. B. $\frac{4}{x^2}$, die dritte endlich ſei ein quadratiſcher Bruch, deſſen Zähler eine Kubikzahl iſt z. B. $\frac{8}{x^2}$. Multiplicirt man nun x^2 mit der erſten Zahl, ſo erhält man 6, und dies iſt eine dreieckige Zahl, multiplicirt man x^2 mit der zweiten, ſo erhält man 4, und dies iſt eine Quadratzahl, und multiplicirt man endlich x^2 mit der dritten, ſo erhält man 8, und dies iſt eine Kubikzahl.

Nun ſoll aber auch die Summe der drei Zahlen $= x^2$ ſein, aber die Summe der drei Zahlen iſt $\frac{18}{x^2}$, man hat alſo die Gleichung

$$x^2 = \frac{18}{x^2}, \text{ oder } x^4 = 18,$$

wenn man nämlich beide Seiten mit x^2 multiplicirt. Daher muß 18 eine Biquadratzahl ſein. Aber 18 iſt die Summe einer dreieckigen Zahl, einer Quadratzahl, und einer Kubikzahl. Man muß alſo eine Biquadratzahl ſuchen, oder eine Quadratzahl, deren Wurzel wieder eine Quadratzahl iſt, und dieſe Biquadratzahl muß man in eine dreieckige Zahl, eine Quadratzahl und eine Kubikzahl zerſtückeln. Die geſuchte Biquadratzahl ſei $= x^4$, die Quadratzahl aber $x^4 - 2x^2 + 1$; ziehe ich dieſe von x^4 ab, ſo bleibt $2x^2 - 1$. Dieſen Reſt muß ich wieder in eine dreieckige Zahl und eine Kubikzahl theilen; die Kubikzahl ſei 8, ſo bleibt als dreieckige Zahl $2x^2 - 9$. Wenn man eine dreieckige Zahl mit 8 multiplicirt und 1 dazu addirt, ſo erhält man ein Quadrat, folglich muß $16x^2 - 71$ ein Quadrat ſein. Ich nehme $4x - 1$ als Wurzel an, ſo wird

$$16x^2 - 71 = 16x^2 - 8x + 1, \text{ und } x = 9.$$

Die dreieckige Zahl iſt alſo 153, die Quadratzahl 6400, die Kubikzahl 8.

Nunmehr komme ich wieder auf die urſprüngliche Aufgabe zurück, und ſetze das Quadrat, welches die Summe aller drei Zahlen ſein ſoll, $= x^2$, die erſte

$=\frac{153}{x^2}$, um durch die Multiplication mit x^2 eine dreieckige Zahl zu erhalten, die zweite $=\frac{6400}{x^2}$ um eine Quadratzahl zu erhalten, die dritte $=\frac{8}{x^2}$, um eine Kubikzahl zu erhalten, denn wenn ich nun die drei Zahlen mit x^2 multiplicire, ſo wird die erſte eine dreieckige Zahl, die zweite ein Quadrat, die dritte ein Cubus. Die Summe der drei Zahlen ſoll $=x^2$ ſein, die Summe aber iſt $\frac{6561}{x^2}$, es iſt alſo

$$x^2 = \frac{6561}{x^2},$$

oder, wenn man alles mit x^2 multiplicirt,

$$x^4 = 6561, \text{ alſo } x = 9.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{153}{81}$, die zweite $\frac{6400}{81}$, die dritte $\frac{8}{81}$, und der Beweis fällt in die Augen.

XLV. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied der größten und mittelſten zu dem Unterſchiede der mittelſten und der kleinſten ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe, außerdem aber die Summe von je zweien eine Quadratzahl ſei.

Aufló-

Aufloͤſung.

Es werde z. B. verlangt, daß der Unterſchied der groͤßten und der mittelſten Zahl das Dreifache von dem Unterſchiede der mittelſten und der kleinſten ſei.

Da die Summe der mittelſten und der kleinſten Zahl ein Quadrat ſein ſoll, ſo ſei dieſelbe $=4$. Nun muß die mittelſteZahl groͤßer als 2 ſein; ſie ſei daher $=x+2$, folglich die kleinſte $=2-x$. Da der Unterſchied der groͤßten und der mittelſten Zahl das Dreifache des Unterſchiedes zwiſchen der mittelſten und der kleinſten Zahl ſein ſoll, dieſer letztere Unterſchied aber $=2x$ iſt, ſo iſt der Unterſchied der groͤßten und der mittelſten Zahl $=6x$, und daher die groͤßte Zahl ſelber $=7x+2$.

Nun ſind noch zwei Bedingungen uͤbrig, naͤmlich daß die Summe der groͤßten und der mittelſten, und die Summe der groͤßten und der kleinſten Zahl ein Quadrat ſei. Hier habe ich alſo wieder die doppelte Gleichung, denn es ſoll ſowohl $8x+4$, als $6x+4$ ein Quadrat ſein; die Aufloͤſung der Gleichung iſt aber ſehr leicht, da die beſtimmte Zahl (4) in beiden Ausdruͤcken eine Quadratzahl iſt. Ich nehme zwei Zahlen deren Produkt $=2x$ iſt, ſo wie dies bekanntlich bei der Aufloͤſung der doppelten Gleichung immer geſchehen muß. Dieſe Zahlen moͤgen $\frac{x}{2}$ und 4 ſein, ſo wird $x=112$.

Wenn ich aber dieſen Werth fuͤr x in die obigen allgemeinen Ausdruͤcke der drei geſuchten Zahlen ſetzen

will, ſo kann ich x, d. i. 112 von 2 nicht abziehen. Ich muß alſo die Rechnung ſo anlegen, daß x kleiner als 2 wird; dann wird aber auch $6x+4$ kleiner als 16, denn wenn ich 6 mit 2 multiplicire und 4 dazu addire, ſo erhalte ich 16. Nun ſollen $8x+4$ und $6x+4$ zwei Quadrate werden, aber 4 iſt auch ein Quadrat, nämlich von 2, alſo habe ich drei Quadrate, $8x+4$, $6x+4$ und 4, und der Unterſchied des größten und des mittelſten iſt ein Drittel von dem Unterſchiede des mittelſten und des kleinſten. Es kommt jetzt alſo darauf an, drei Quadrate von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß der Unterſchied des größten und mittelſten ein Drittel ſei von dem Unterſchiede des mittelſten und des kleinſten, jedoch ſo, daß das kleinſte dieſer Quadrate 4, das mittelſte kleiner als 16 ſei.

Ich ſetze alſo das kleinſte der drei Quadrate $=4$, und die Wurzel des mittelſten $=x+2$, alſo das mittelſte ſelbſt $=x^2+4x+4$. Da nun der Unterſchied des größten und des mittelſten ein Drittel von dem Unterſchiede des mittelſten und des kleinſten ſein ſoll, der Unterſchied des mittelſten und des kleinſten aber x^2+4x iſt, ſo muß der Unterſchied des größten und des mittelſten $\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x$ ſein. Das mittelſte Quadrat iſt aber x^2+4x+4, folglich iſt das größte $1\frac{1}{3}x^2+5\frac{1}{3}x+4$, und dieſer Ausdruck muß alſo ein Quadrat ſein. Ich multiplicire alles mit 9, ſo muß auch $12x^2+48x+36$,

und, wenn ich mit 4 dividire, auch $3x^2+12x+9$ ein Quadrat ſein. Aber das mittelſte Quadrat ſollte kleiner als 16 ſein, folglich muß ſeine Wurzel kleiner als 4 ſein. Dieſe Wurzel war $x+2$, alſo muß $x+2$ kleiner als 4, und wenn ich von beiden Zahlen 2 abziehe, ſo muß x kleiner als 2 ſein.

Wenn ich nun $3x^2+12x+9$ zu einem Quadrat machen ſoll, ſo mache ich ein Quadrat von 3 weniger einem Vielfachen von x, und nun erhalte ich den Werth von x, indem ich eine gewiſſe Zahl mit 6 multiplicire, dazu 12, nämlich den Coefficienten von $12x$ in obigem Quadrat addire, und die Summe durch den Unterſchied zwiſchen dem Quadrat jener noch nicht beſtimmten Zahl und dem Coefficienten von $3x^2$ dividire. Es kommt alſo darauf an, eine Zahl von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß, wenn man ſie mit 6 multiplicirt, zu dem Produkte 12 addirt, und die Summe durch ihr Quadrat weniger 3 dividirt, der Quotient kleiner als 2 wird.

Die geſuchte Zahl ſei $=x$. Wenn ich dieſe mit 6 multiplicire, und zu dem Produkt 12 addire, ſo erhalte ich $6x+12$. Wenn ich aber von dem Quadrat der geſuchten Zahl 3 abziehe, ſo erhalte ich x^2-3; es ſoll alſo $6x+12$ durch x^2-3 dividirt werden, und der Quotient ſoll kleiner als 2 ſein. Wenn ich aber 2 durch 1 dividire, ſo wird der Quotient 2, daher muß $6x+12$ zu x^2-3 ein kleineres Verhältniß haben als 2 zu 1, und die Produkte der gleichnamigen Glieder ſind daher

ungleich, vielmehr iſt das Produkt $(6x+12)\times 1$ kleiner als das Produkt $(x^2-3)\times 2$, d. h. $6x+12$ iſt kleiner als $2x^2-6$. Man addire noch die fehlenden Größen, ſo findet man, daß $2x^2$ größer als $6x+18$ ſein muß.

Um nun hier eine Vergleichung anzuſtellen, ſo erhebe ich den halben Coefficienten von x ins Quadrat, und erhalte 9. Nun multipliciren wir den Coefficienten von x^2 mit der beſtimmten Zahl 18, giebt 36; dazu addiren wir 9, giebt 45, und davon iſt die Wurzel nicht kleiner als 7. Dazu addiren wir den halben Coefficienten von x, und dividiren durch den Coefficienten von x^2, ſo finden wir, daß x nicht kleiner ſein darf als 5.

Wir müſſen alſo $3-5x$ als Wurzel von $3x^2+12x+9$ anſehen, ſo wird

$$3x^2+12x+9=9-30x+25x^2, \text{ und } x=\frac{42}{22}=\frac{21}{11}.$$

Nun war die Wurzel des zweiten Quadrats $=x+2$, dieſe Wurzel wird alſo $\frac{43}{11}$, und das Quadrat ſelbſt $\frac{1849}{121}$ ſein.

Nun komme ich wieder auf die frühere Aufgabe, und ſetze die Quadratzahl $\frac{1849}{121}=6x+4$, und wenn ich jetzt alles mit 121 multiplicire, ſo wird $x=\frac{1365}{726}$. Dieſen Werth für x ſetze ich in den für die urſprüngliche Aufgabe gemachten Anſatz. Wir haben nämlich die mittelſte Zahl $=x+2$, die kleinſte $2-x$, die größte $=7x+2$ geſetzt; die größte Zahl iſt alſo $\frac{11007}{726}$, die zweite $\frac{2817}{726}$,

die kleinſte oder die dritte $\frac{87}{726}$. Hier iſt nun der Nenner keine Quadratzahl, wohl aber der ſechste Theil des Nenners, nämlich 121. Wir wollen daher alles mit 6 dividiren, ſo wird die erſte Zahl $\frac{1834\frac{1}{2}}{121}$, die zweite $\frac{469\frac{1}{2}}{121}$, die dritte $\frac{14\frac{1}{2}}{121}$. Will man aber für den Zähler eine ganze Zahl haben, ſo daß der Bruch $\frac{1}{2}$ weggeſchafft wird, ſo multiplicire man alles mit 4, ſo wird die erſte Zahl $\frac{7338}{484}$, die zweite $\frac{1878}{484}$, die dritte $\frac{58}{484}$, und der Beweis fällt in die Augen.

XLVI. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied zwiſchen dem Quadrat der größten und dem Quadrat der kleinſten zu dem Unterſchiede zwiſchen der mittelſten und der kleinſten Zahl ein vorgeſchriebenes Verhältniß habe, außerdem aber die Summe von je zweien ein Quadrat ſei.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß der Unterſchied zwiſchen dem Quadrat der größten und dem Quadrat der mittelſten Zahl das Dreifache des Unterſchiedes zwiſchen der mittelſten und der kleinſten Zahl ſei.

Da die Summe der größten und der mittelſten Zahl ein Quadrat ſein ſoll, ſo ſei dieſelbe $=16x^2$; dann iſt aber die größte Zahl größer als $8x^2$, und dieſe ſei daher $=8x^2+2$. Da die Summe der größten und der mittelſten Zahl größer als die Summe der größten und der kleinſten ſein muß, die Summe der größten und mittelſten aber $16x^2$ beträgt, ſo wird die Summe der größten und kleinſten Zahl kleiner als $16x^2$, aber größer als $8x^2$ ſein. Die Summe der größten und kleinſten ſei alſo $=9x^2$. Die Summe der größten und der mittelſten Zahl war $16x^2$, die größte Zahl aber $=8x^2+2$, die mittelſte wird alſo $=8x^2-2$, und die dritte oder kleinſte Zahl $=x^2-2$ ſein.

Nun ſoll der Unterſchied zwiſchen dem Quadrat der größten und dem Quadrat der mittelſten drei Mal ſo groß ſein, als der Unterſchied zwiſchen der mittelſten und der kleinſten Zahl. Der Unterſchied zwiſchen dem Quadrat der größten und dem Quadrat der kleinſten iſt $64x^2$, aber der Unterſchied der mittelſten und der kleinſten Zahl iſt $7x^2$, und das Dreifache davon $21x^2$. Die $64x^2$ entſtehen dadurch, daß man $32x^2$ zwei Mal nimmt. Es kommt alſo darauf an, eine Zahl zu finden, welche mit 32 multiplicirt 21 gebe; eine ſolche Zahl iſt aber $\frac{21}{32}$. Ich ſetze daher die erſte Zahl $=8x+\frac{21}{32}$, die mittelſte $=8x-\frac{21}{32}$, die dritte Zahl $=x^2-\frac{21}{32}$, und jetzt iſt nur noch eine Bedingung zu erfüllen, nämlich daß die

Summe der mittelſten und der kleinſten Zahl ein Quadrat ſei. Dieſe Summe iſt aber $9x^2 - \frac{42}{32}$; davon ſei $3x - 6$ die Wurzel, ſo wird $x = \frac{597}{576}$.

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{3069000}{331776}$, die zweite $\frac{2633544}{331776}$, die dritte $\frac{138681}{331776}$.

Fünftes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen ſuchen, welche eine geometriſche Reihe bilden, und außerdem ſo beſchaffen ſind, daß jede von ihnen ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeſchriebene Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 12; eine geometriſche Reihe bilden aber drei Zahlen, wenn das Produkt der beiden äußerſten die mittelſte zu ſeiner Quadratwurzel hat.

Ich ſuche daher zuvörderſt ein Quadrat, welches ein Quadrat zum Reſte läßt, wenn man 12 davon abzieht. Dies iſt aber ganz leicht, und man findet, daß $42\frac{1}{4}$ ein ſolches Quadrat iſt.

Ich ſetze daher das eine der äußerſten Glieder $= 42\frac{1}{4}$, das andere $= x^2$, ſo wird das mittelſte Glied

$= 6\frac{1}{2}x$ ſein. Nun ſollen auch die beiden anderen Glieder, x^2 und $6\frac{1}{2}x$, eine Quadratzahl zum Reſte laſſen, wenn man 12 davon abzieht, d. h. $x^2 - 12$ und $6\frac{1}{2}x - 12$, ſollen Quadrate ſein.

Der Unterſchied dieſer beiden Zahlen iſt $x^2 - 6\frac{1}{2}x$; dieſer Unterſchied hat die Faktoren x und $x - 6\frac{1}{2}$. Wenn man den halben Unterſchied dieſer Faktoren ins Quadrat erhebt, ſo erhält man $\frac{169}{16}$, und dies iſt dem kleineren Quadrate gleich. Man hat alſo

$$6\frac{1}{2}x - 12 = \frac{169}{16}, \text{ und } x = \frac{361}{164}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $42\frac{1}{4}$, die zweite $\frac{2346\frac{1}{2}}{104} = \frac{130321}{10816}$, die dritte $\frac{130221}{10816}$.

II. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen ſuchen, welche eine geometriſche Reihe bilden, und außerdem ſo beſchaffen ſind, daß jede von ihnen ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeſchriebene Zahl dazu addirt.

Auflöſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 20. Nun ſuche ich wieder ein Quadrat, welches ein Quadrat zur Summe

giebt, wenn man 20 dazu addirt, und finde 16. Ich ſetze alſo das eine der äußeren Glieder $=16$, das andere $=x^2$, folglich das mittelſte $=4x$.

Nach dem, was bei der vorigen Aufgabe geſagt wurde, ſollen nun $4x+20$ und x^2+20 zwei Quadrate ſein. Der Unterſchied der beiden Ausdrücke iſt x^2-4x; dieſer hat die Faktoren x und $x-4$. Wenn ich den halben Unterſchied dieſer Faktoren ins Quadrat erhebe, ſo erhalte ich 4, und dies ſollte dem kleineren der beiden Quadrate gleich ſein, alſo $4=4x+20$. Dies iſt aber ungereimt, denn die Zahl 4 darf nicht kleiner als 20 ſein. Aber die Zahl 4 iſt ein Viertel von 16, und 16 iſt hier nicht eine beliebig gewählte Zahl, ſondern ſie iſt ein Quadrat, welches, um 20 vermehrt, wieder ein Quadrat wird.

Wir müſſen daher ein Quadrat ſuchen, deſſen vierter Theil größer als 20 iſt, und welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man 20 dazu addirt. Dies Quadrat muß alſo größer als 80 ſein, aber 81 iſt ein Quadrat, welches größer als 80 iſt. Wenn wir alſo die Wurzel des geſuchten Quadrats $=x+9$ ſetzen, ſo iſt das Quadrat ſelbſt $=x^2+18x+81$; dies ſoll alſo auch dann noch ein Quadrat ſein, wenn man 20 dazu addirt, d. h. $x^2+18x+101$ ſoll ein Quadrat ſein. Ich ſehe $x-11$ als die Wurzel dieſes Quadrats an, ſo iſt das Quadrat ſelbſt $x^2-22x+121$, folglich wird

$$x^2+18x+101=x^2-22x+121, \text{ und } x=\frac{1}{2}.$$

Nun hatten wir die Wurzel des geſuchten Quadrats $= x + 9$ geſetzt, alſo iſt das geſuchte Quadrat ſelbſt $90\frac{1}{4}$.

Nunmehr kehre ich zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, und ſetze die erſte Zahl $= 90\frac{1}{4}$, die dritte $= x^2$, folglich die mittelſte $= 9\frac{1}{2}x$, und nun iſt die Aufgabe zu löſen, auf welche Art $x^2 + 20$ und $9\frac{1}{2}x + 20$ zwei Quadrate werden.

Der halbe Unterſchied ins Quadrat erhoben, giebt $\frac{361}{16}$, und dies iſt dem kleineren Quadrate gleich, alſo wird

$$9\frac{1}{2}x + 20 = \frac{361}{16}, \text{ und } x = \frac{41}{152}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $90\frac{1}{4}$, die zweite $\frac{389\frac{1}{2}}{152}$, die dritte $\frac{1681}{23104}$.

III. Aufgabe.

Man ſoll zu einer gegebenen Zahl drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl die Zahlen ſelbſt, als das Produkt aus je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt.

Auflöſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 5. Nun haben wir in den Porismen den Satz gehabt:

Wenn man zwei Zahlen hat, und nicht nur jede dieſer Zahlen für ſich, ſondern auch das Produkt beider ein Quadrat wird, wenn man die nämliche vorgeſchriebene Zahl dazu addirt, ſo ſind ſie von zwei unmittelbar auf einander folgenden Quadraten entſtanden.

Ich nehme alſo zwei Quadrate dieſer Art, das eine von der Wurzel $x+3$, das andere von der Wurzel $x+4$, ſo wird das eine Quadrat $=x^2+6x+9$, das andere $=x^2+8x+16$.

Ich ziehe von beiden Quadraten die Zahl 5 ab, und ſetze die erſte der geſuchten Zahlen $=x^2+6x+4$, die zweite $=x^2+8x+11$, die dritte aber ſetze ich der doppelten Summe beider, weniger 1, gleich, d. i. ich ſetze ſie $=4x^2+28x+29$.

Nun ſoll auch dieſe letztere Zahl, wenn noch 5 dazu kommt, ein Quadrat werden, d. h. $4x^2+28x+34$ ſoll ein Quadrat ſein. Ich nehme $2x-6$ als Wurzel dieſes Quadrats an, ſo wird

$$4x^2+28x+34=4x^2-24x+36, \text{ und } x=\frac{1}{26}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{2861}{676}$, die zweite $\frac{7645}{676}$, die dritte $\frac{20336}{676}$.

IV. Aufgabe.

Man ſoll zu einer gegebenen Zahl drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl die

Zahlen ſelbſt, als das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 6. Ich nehme wieder zwei auf einander folgende Quadrate, nämlich x^2 und x^2+2x+1, addire zu dieſen die gegebene Zahl, und ſetze nun die erſte der geſuchten Zahlen $=x^2+6$, die zweite $=x^2+2x+7$, die dritte Zahl aber etze ich der Summe beider, weniger 1, gleich, d. h. $=4x^2+4x+25$.

Nun iſt nur noch erforderlich, daß auch die letztere Zahl, wenn man 6 davon abzieht, oder daß $4x^2+4x+19$ ein Quadrat ſei. Ich nehme $2x-6$ als Wurzel an, ſo iſt

$$4x^2+4x+19=4x^2-24x+36, \text{ und } x=\frac{17}{28}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{4993}{784}$, die zweite $\frac{6729}{784}$, die dritte $\frac{22660}{784}$.

V. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, man mag die Summe von beiden oder auch das dritte Quadrat dazu addiren.

Auflöſung.

In den Porismen haben wir wieder folgenden Satz:

Wenn man zu zwei auf einander folgenden Quadraten noch eine dritte Zahl ſucht, welche um 2 größer iſt, als die doppelte Summe beider, ſo hat man drei Zahlen von der Beſchaffenheit, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, man mag die Summe der beiden in einander multiplicirten Zahlen oder auch die dritte Zahl dazu addiren.

Daher ſetze ich das erſte der geſuchten Quadrate $= x^2 + 2x + 1$, das zweite $= x^2 + 4x + 4$, und das dritte $= 4x^2 + 12x + 12$. Nun iſt nur noch das Eine übrig, daß man auch die dritte Zahl, $4x^2 + 12x + 12$, oder auch den vierten Theil dieſer Zahl, $x^2 + 3x + 3$, zu einem Quadrat mache. Ich nehme $x - 3$ als Wurzel dieſes Quadrats an, ſo iſt das Quadrat ſelbſt $= x^2 - 6x + 9$, es iſt alſo

$$x^2 + 3x + 3 = x^2 - 6x + 9, \text{ und } x = \frac{2}{3}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{25}{9}$, die zweite $\frac{64}{9}$, die dritte $\frac{196}{9}$.

VI. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß jegliche derſelben ein Quadrat wird, wenn man die Zahl 2 davon abzieht, das

Produkt von je zweien aber ein Quadrat wird, man mag nun die Summe der beiden Faktoren, oder die dritte Zahl davon abziehen.

Auflöſung.

Wenn man zu den in der vorigen Aufgabe gefundenen Zahlen noch 2 addirt, ſo leiſten die dadurch entſtandenen Zahlen, was die Aufgabe vorſchreibt. Hieraus entſteht aber folgende Auflöſung.

Wir ſetzen die eine der geſuchten Zahlen $= x^2 + 2$, die zweite $= x^2 + 2x + 3$, die dritte $= 4x^2 + 4x + 6$, ſo leiſten dieſe Zahlen den Bedingungen der Aufgabe Genüge.

Nun ſoll aber auch $4x^2 + 4x + 4$, alſo auch der vierte Theil davon, nämlich $x^2 + x + 1$ ein Quadrat ſein. Wenn wir die Wurzel dieſes Quadrats durch die Differenz $x - 2$ ausdrücken, ſo iſt das Quadrat ſelbſt $x^2 - 4x + 4$, alſo wird

$$x^2 + x + 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ und } x = \frac{3}{5}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{59}{25}$, die zweite $\frac{114}{25}$, die dritte $\frac{246}{25}$, und der Beweis fällt in die Augen.

VII.

Lehnſatz für die folgenden Aufgaben.

Man ſoll zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird,

wenn man die Summe ihrer Quadrate dazu addirt.

Aufloſung.

Die erſte Zahl ſei $=x$, für die zweite ſetze man eine beliebige Zahl, z. B. 1, ſo iſt ihr Produkt $=x$, die Summe ihrer Quadrate $=x^2+1$, und wenn man dazu x addirt, ſo erhält man x^2+x+1, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Man ſetze die Wurzel $=x-2$, ſo iſt

$$x^2+x+1=x^2-4x+4, \text{ und } x=\frac{3}{5}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{3}{5}$, die zweite $\frac{5}{5}$, und wenn man den gemeinſchaftlichen Nenner 5 wegwirft, ſo wird die erſte Zahl 3, und die zweite Zahl 5, und dieſe Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt; denn das Produkt derſelben, mit der Summe ihrer Quadrate zuſammen genommen, wird wieder ein Quadrat. Mit welcher Zahl man aber auch 3 und 5 multipliciren mag, ſo leiſten die dadurch entſtehenden Zahlen doch immer was die Aufgabe vorſchreibt.

VIII. Aufgabe.

Man ſoll drei rechtwinklige Dreiecke ſuchen, deren Flächen einander gleich ſind.

Aufloſung.

Zuerſt muß man zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt und die Summe ihrer Quadrate

drate zuſammen genommen, wieder ein Quadrat wird. Dies iſt aber in der vorigen Aufgabe gezeigt worden, und die geſuchten Zahlen ſind 3 und 5. Das Produkt dieſer Zahlen, mit der Summe ihrer Quadrate zuſammen genommen, giebt ein neues Quadrat, deſſen Wurzel die Zahl 7 iſt. Nun bilde ich drei rechtwinklige Dreiecke, jedes aus zwei Zahlen, das erſte nämlich von den Zahlen 7 und 3; das zweite von den Zahlen 7 und 5; und das dritte von 7 und der Summe der gefundenen Zahlen, alſo von 7 und 8; die Dreiecke laſſen ſich alſo durch folgende Zahlen vorſtellen, das erſte durch die Zahlen 40, 42, 58; das zweite durch die Zahlen 24, 70, 74; und das dritte durch die Zahlen 15, 112, 113. Dieſe Dreiecke ſind rechtwinklig, und haben eine gleiche Fläche, welche durch die Zahl 840 vorgeſtellt werden kann.

IX. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat jedweder auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der drei Zahlen dazu addirt oder davon abzieht.

Auflöſung.

Man verlangt zuerſt, daß das Quadrat der erſten Zahl auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die Summe aller drei Zahlen dazu addirt oder davon abzieht.

In jedem rechtwinkligen Dreieck bleibt aber das Quadrat der Hypotenuſe auch dann noch ein Quadrat, wenn man den vierfachen Flächeninhalt dazu addirt, oder davon abzieht. Die drei geſuchten Zahlen müſſen alſo die Hypotenuſen von drei rechtwinkligen Dreiecken, die Summe der drei Zahlen aber muß der vierfache Flächeninhalt derjenigen Dreiecke ſein, deren Hypotenuſen durch die drei Zahlen ausgedrückt werden.

Es kommt alſo darauf an, drei rechtwinklige Dreiecke zu ſuchen, deren Flächeninhalt gleich iſt; dieſe Aufgabe haben wir aber ſchon gelöſ't, und die verlangten Dreiecke werden durch die Zahlen 40, 42 und 58; 24, 70 und 74; 15, 112 und 113 vorgeſtellt.

Jetzt kehre ich zu der eigentlichen Aufgabe zurück, und drücke die geſuchten Zahlen durch eine unbekannte Größe aus, gebe ihnen aber die vorher berechneten Hypotenuſen zu Coefficienten, die erſte iſt alſo $= 58x$, die zweite $= 74x$, die dritte endlich $= 113x$; die Summe der drei Zahlen drücke ich durch x^2 und die vierfache Fläche der vorhin berechneten Dreiecke, alſo durch die Zahl $3360x^2$ aus. Daher wird

$$3360x^2 = 245x, \text{ und } x = \frac{7}{96}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{406}{96}$, die zweite $\frac{518}{96}$, die dritte $\frac{791}{96}$.

X. Aufgabe.

Wenn drei Quadrate gegeben ſind, ſo iſt es iſt immer möglich, drei Zahlen von der Beſchaffenheit zu finden, daß je zwei derſelben dieſe Quadrate zu ihrem Produkte geben.

Auflöſung.

Wenn 4, 9 und 16 die gegebenen Quadrate ſind, und man ſetzt die eine der geſuchten Zahlen $= x$, ſo iſt von den beiden übrigen die eine $= \frac{4}{x}$, die andere $= \frac{9}{x}$, und es iſt nur noch erforderlich, daß das Produkt der zweiten und dritten $= 16$ ſei. Dieſes Produkt iſt aber $\frac{36}{x^2}$; man hat alſo die Gleichung

$$16 = \frac{36}{x^2}, \text{ und } x = 1\frac{1}{2}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $1\frac{1}{2}$, die zweite $2\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2\frac{2}{3}$, die dritte aber iſt 6.

Aber wir wollen auch das ganze Verfahren zeigen. Wir fanden $\frac{36}{x^2} = 16$; wenn man nun alles mit x^2 multiplicirt, ſo erhält man $16x^2 = 36$, und $x^2 = \frac{36}{16}$, und daraus iſt die Wurzel $\frac{6}{4}$. Aber 6 entſteht, indem man die Wurzeln von 4 und 9, oder die Wurzeln des erſten und

zweiten Quadrats in einander multiplicirt, der Nenner 4 iſt aber die Wurzel des dritten Quadrates, 16.

Wenn dir alſo die Aufgabe vorgelegt wird, drei Zahlen von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß die Produkte von je zweien vorgeſchriebene Quadrate geben, z. B. die Quadrate 4, 9 und 16, ſo nimm das Produkt aus den Wurzeln von 4 und 9, dieſes wird 6; dies Produkt dividire durch die Wurzel des dritten Quadrats, ſo wird $x = \frac{6}{4}$; darauf dividire das Quadrat 4 durch $\frac{6}{4}$, dies giebt $\frac{16}{6}$, und endlich dividire das Quadrat 9 durch $\frac{6}{4}$, dies giebt 6. Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{6}{4}$, die zweite $\frac{16}{6}$, die dritte 6.

XI. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, man mag die Summe der drei Zahlen davon abziehen oder dazu addiren.

Auflöſung.

Wir ſuchen zuerſt wieder drei rechtwinklige Dreiecke, deren Flächen einander gleich ſind; darauf nehmen wir die Quadrate der Hypotenuſen, nämlich 3364, 5476 und 12769. Wenn wir dieſe haben, ſo ſuchen wir, wie vorher gezeigt worden, drei Zahlen von der Art, daß die

Produkte von je zweien gegebenen Quadraten, nämlich den eben angegebenen, gleich werden. Wir nehmen aber gerade dieſe Quadrate, weil ſie (nach IX.) ſo beſchaffen ſind, daß ſie auch dann noch Quadrate bleiben, wenn man 3360 dazu addirt oder davon abzieht. Aber 3360 iſt die vierfache Fläche jedes einzelnen Dreieckes. Daher drücke ich nun die drei Zahlen durch x mit folgenden Coefficienten aus, die erſte nämlich wird $= \frac{4292}{115}x$, die zweite $\frac{4181}{29}x$, die dritte $\frac{3177}{37}x$, denn wenn ich je zwei dieſer Coefficienten multiplicire, ſo erhalte ich die obigen Quadrate. Nun muß ich die Summe dieſer drei Zahlen und $3360x^2$ gleich ſetzen, und damit alle Brüche gleiche Nenner erhalten, ſo drücken wir ſie alle durch den Nenner 121249 aus, ſo wird die erſte Zahl $\frac{4605316}{121249}x$, die zweite $\frac{17480761}{121249}x$, die dritte $\frac{10738729}{121249}x$, und die Summe von allen dreien $\frac{32824806}{121249}x$, und dieſe iſt $= 3360x^2$. Nun multiplicire ich alles mit dem Nenner 121249, ſo wird

$$32824806x = 407396640x^2, \text{ und } x = \frac{32824806}{407396640}.$$

XII. Aufgabe.

Man ſoll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stück dieſelbe vorgeſchriebene Zahl addiren, und dieſe Summen ſollen Quadrate werden.

Dieſe vorgeſchriebene Zahl darf aber weder ungerade ſein, noch das Doppelte dieſer Zahl, wenn man 1 dazu addirt, von einer Primzahl gemeſſen werden.

Auflöſung.

Es ſei alſo vorgeſchrieben, daß man zu jedem der beiden Stücke die Zahl 6 addiren, und es dadurch zu einem Quadrat machen ſolle.

Da wir die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stücke die Zahl 6 addiren, und es dadurch zu einen Quadrat machen ſollen, ſo iſt die Summe der dadurch entſtehenden Quadrate 13. Es kommt alſo darauf an, die Zahl 13 in zwei Quadrate zu theilen, deren jedes größer als 6 iſt; wenn ich alſo die Zahl 13 in zwei Quadrate theile, deren Unterſchied kleiner als 1 iſt, ſo habe ich die Aufgabe gelöſ't.

Ich nehme die Hälfte von 13, d. i. $6\frac{1}{2}$, und unterſuche, was für einen Bruch ich zu $6\frac{1}{2}$ addiren kann, damit die Summe ein Quadrat ſei. Ich multiplicire alles mit 4, und unterſuche jetzt, was für einen quadratiſchen Bruch ich zu 26 addiren kann, damit die Summe ein Quadrat werde. Der quadratiſche Bruch, welchen ich ſuche, ſei $= \frac{1}{x^2}$, ſo ſoll $26 + \frac{1}{x^2}$, oder wenn ich alles mit x^2 multiplicire, $26x^2 + 1$ ein Quadrat ſein. Ich

ſetze die Wurzel dieſes Ausdrucks $= 5x + 1$, ſo wird $x = 10$, alſo $x^2 = 100$, und der quadratiſche Bruch $= \frac{1}{100}$. Der Bruch alſo, welchen ich zu 26 addiren muß, iſt $\frac{1}{100}$, und der Bruch, welchen ich zu $6\frac{1}{2}$ addiren muß, iſt $\frac{1}{400}$, und dadurch erhalte ich ein Quadrat von der Wurzel $\frac{51}{20}$.

Ich muß alſo die Theilung der Zahl 13 in zwei Quadrate ſo einrichten, daß die Wurzel jedes Quadrats ſich der Zahl $\frac{51}{20}$ möglichſt nähert. Und nun unterſuche ich, welche Zahl ich von 3 abziehen, und zu 2 addiren muß, damit dieſelbe Zahl, nämlich $\frac{51}{20}$ herauskomme. Ich nehme alſo zwei Quadrate, das eine von der Wurzel $11x + 2$, das andere von der Wurzel $3 - 9x$, und ſetze die Summe beider Quadrate

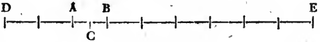
$$202x^2 - 10x + 13 = 13, \text{ ſo wird } x = \frac{5}{101}.$$

Die Wurzel des einen Quadrats iſt alſo $\frac{257}{101}$, die des zweiten $\frac{258}{101}$, und wenn ich von jedem dieſer Quadrate die Zahl 6 abziehe, ſo iſt das eine Stück der Zahl $1 = \frac{5358}{10201}$, das andere $= \frac{4843}{10201}$, und es iſt klar, daß jedwedes Stück, wenn man 6 dazu addirt, wieder ein Quadrat wird.

XIII. Aufgabe.

Man ſoll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, und zu jedem Stück eine andere, aber vorgeſchriebene, Zahl addiren, und beide Summen ſollen dadurch Quadrate werden.

Auflöſung.



Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß man die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, und zu dem einen Stück die Zahl 2, zu dem anderen die Zahl 6 addiren, und daß in beiden Fällen die Summe ein Quadrat werden ſolle.

Man nehme eine Einheit z. B. AB, und nehme an, ſie ſei in C der Aufgabe gemäß getheilt; darauf lege man zu dem Stücke AC zwei Einheiten = AD, und zu dem Stücke BC ſechs Einheiten = BE, ſo iſt ſowohl DC als EC ein Quadrat. Da aber AB = 1, und die Summe AD + BE = 8, ſo iſt die ganze DE = 9, und dieſe ſoll man alſo in zwei Quadrate, nämlich DC und CE theilen. Da aber das eine dieſer Quadrate, nämlich DC, größer als 2 oder als AD, und auch kleiner als 3 oder als BD iſt, ſo kommt es darauf an, die Quadratzahl 9 in zwei andere Quadrate CD und CE zu theilen, jedoch ſo, daß das eine derſelben, nämlich DC, größer als 2 und kleiner als 3 werde; denn hat man DC

gefunden, ſo darf man nur AD = 2 davon abziehen, um AC zu haben. Nun erwäge man ferner, daß AB = 1 iſt, deßhalb wird auch das Stück BC und der Punkt C gegeben ſein, in welchem man die Einheit theilen muß.

Jetzt wollen wir aber den ganzen Gang des Verfahrens darſtellen. Das eine der geſuchten Quadrate, und zwar dasjenige, welches zwiſchen 2 und 3 fallen ſoll, ſei $= x^2$, ſo wird das andere $= 9 - x^2$ ſein. Dieſen Ausdruck zu einem Quadrat zu machen, iſt ganz leicht, aber man muß es ſo einrichten, daß x^2 zwiſchen 2 und 3 fällt. Wir nehmen zwei Quadrate, das eine etwas größer als 2, das andre etwas kleiner als 3 z. B. $\frac{289}{144}$ und $\frac{361}{144}$. Wenn wir die Rechnung nun ſo anlegen, daß x^2 zwiſchen dieſe beiden Quadrate fällt, ſo iſt die Aufgabe gelöſ't. Dann muß aber auch die Wurzel von x^2, d. i. x, größer als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{29}{12}$ werden; man muß alſo, wenn man $9 - x^2$ zu einem Quadrat macht, darauf Rückſicht nehmen, daß x größer als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{29}{12}$ werden ſoll.

Wenn wir aber $9 - x^2$ zu einem Quadrat machen ſollen, ſo nehmen wir 3 weniger einem gewiſſen Vielfachen von x als Wurzel an, und wir finden daß x entſteht, indem man eine gewiſſe Zahl ſechs Mal nimmt, und dieſes Sechsfache durch das um 1 vergrößerte Quadrat derſelben Zahl dividirt. Ich muß alſo zuerſt eine

Zahl ſuchen, welche ſechs Mal genommen und durch ihr um 1 vergrößertes Quadrat dividirt, einen Quotienten giebt, der größer als $\frac{17}{12}$, und kleiner als $\frac{29}{12}$ iſt.

Die geſuchte Zahl ſei $= x$; nun ſoll alſo der Quotient $\frac{6x}{x^2+1}$ größer als $\frac{17}{12}$, und kleiner als $\frac{19}{12}$ werden; aber 17 dividirt durch 12 giebt auch den Quotienten $\frac{17}{12}$, daher muß das Verhältniß $6x : x^2+1$ größer ſein, als $17 : 12$, folglich auch das Produkt von $6x$ und 12, d. i. $72x$, größer ſein, als das Produkt von x^2+1 und 17, d. i. größer als $17x^2+17$.

Man erhebe den halben Coefficienten von x ins Quadrat, dies giebt 1296; davon ziehe man das Produkt der beſtimmten Zahl 17 und des Coefficienten von x^2, alſo 289 ab, ſo bleibt 1007; davon iſt die Quadratwurzel nicht größer als 31; dazu addire man den halben Coefficienten von x, ſo erhält man die geſuchte Zahl nicht größer als 67; endlich dividire man mit dem Coefficienten von x^2, ſo wird x nicht größer als $\frac{67}{17}$.

Auf gleiche Weiſe finden wir, daß das Verhältniß $6x : x^2+1$ kleiner ſein muß als $19 : 12$, und wir finden daraus, daß x nicht kleiner als $\frac{66}{19}$ ſein darf; wir haben aber auch gefunden, daß x nicht größer als $\frac{67}{17}$ ſein darf. Man ſetze alſo $x = 3\frac{1}{2}$. Nun mache ich das

Digitized by Google

Quadrat von $3-5\frac{1}{2}x$, ſo erhalte ich $12\frac{1}{4}x^2-21x+9$. Daher iſt

$$12\frac{1}{4}x^2-21x+9=9-x^2.$$

Hieraus findet man $x=\frac{84}{53}$, und $x^2=\frac{7056}{2809}$; ziehen wir davon 2 ab, ſo iſt das eine Stück der Zahl $1=\frac{1438}{2809}$, das andere $=\frac{1371}{2809}$, und ſo wird geleiſtet, was die Aufgabe vorſchreibt.

XIV. Aufgabe.

Man ſoll die Zahl 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stück dieſelbe vorgeſchriebene Zahl addiren, und alle drei Stücke ſollen dadurch Quadrate werden. Die gegebene Zahl darf aber weder 2, noch aus derjenigen Reihe ſein, welche man erhält, wenn man 2 zu einem Vielfachen der Zahl 8 addirt.

Auflöſung.

Es ſei z. B. vorgeſchrieben, daß man 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stücke die Zahl 3 addiren, und dadurch alle drei Stücke zu Quadraten machen ſolle.

Hier muß man wieder die Zahl 10 in drei Quadrate theilen, und zwar ſo, daß jedes derſelben größer als 3 wird; wenn ich alſo die Zahl 10 vermittelſt Annäherung an ein gewiſſes Quadrat in drei Quadrate

theile, ſo läßt ſich bewirken, daß jedes derſelben größer als 3 wird, und wenn ich von jedem dieſer drei Quadrate die Zahl 3 abziehe, ſo kann ich dadurch die drei Stücke erhalten, in welche die Zahl 1 getheilt werden muß.

Wir nehmen alſo ein Drittel von 10, d. i. $3\frac{1}{3}$, und unterſuchen, was für einen quadratiſchen Bruch man zu $3\frac{1}{3}$ addiren muß, damit die Summe ein Quadrat werde. Man multiplicire alles mit 9, ſo ſoll man zu 30 einen quadratiſchen Bruch von der Beſchaffenheit addiren, daß die Summe ein Quadrat wird. Dieſer quadratiſche Bruch ſei $=\frac{1}{x^2}$; nun multiplicire man alles mit x^2, ſo ſoll $30x^2+1$ ein Quadrat ſein. Die Wurzel ſei $5x+1$, ſo iſt

$$30x^2+1=25x^2+10x+1.$$

Daraus findet man $x=2$, $x^2=4$ und $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}$. Wenn man alſo zu 30 den Bruch $\frac{1}{4}$ addiren muß, ſo muß man zu $3\frac{1}{2}$ den Bruch $\frac{1}{36}$ addiren, und erhält dadurch das Quadrat $\frac{121}{36}$. Man muß alſo 10 in drei Quadrate von der Art theilen, daß ſich die Wurzel eines jeden der Zahl $\frac{11}{6}$ nährt. Aber 10 beſteht aus zwei Quadraten 9 und 1; wir theilen daher 1 in die beiden Quadrate $\frac{9}{25}$ und $\frac{16}{25}$, ſo daß nun 10 aus den drei Quadraten 9,

$\frac{16}{25}$ und $\frac{9}{25}$ beſteht. Man muß alſo die Wurzel jedes dieſer Quadrate der Zahl $\frac{11}{6}$ nahe zu bringen ſuchen. Dieſe Wurzeln ſind aber 3, $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{5}$; man multiplicire alles mit 30, ſo werden die Wurzeln 90, 24 und 18, die Zahl $\frac{11}{6}$ aber wird 55. Man muß alſo jede Wurzel der Zahl 55 nahe zu bringen ſuchen. Man ſetze die Wurzel des einen $=3-35x$, die des andern $=31x+\frac{4}{5}$, die des dritten endlich $37x+\frac{3}{5}$. Die Summe der Quadrate wird alſo $3555x^2-116x+10$. Nun ſetze man

$$3555x^2-116x+10=10,$$

ſo wird $x=\frac{116}{3555}$. Dadurch ſind nun die Wurzeln der Quadrate gegeben, folglich auch die Quadrate ſelbſt, und das Uebrige iſt für ſich ſelbſt klar.

XV. Aufgabe.

Man ſoll die Zahl 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stück eine andere, aber vorgeſchriebene, Zahl addiren, und jedes der drei Stücke dadurch zu einem Quadrate machen.

Auflöſung.

Wenn 2, 3 und 4 die vorgeſchriebenen Zahlen ſind, ſo kommt es darauf an, die Zahl 10 in drei Quadrate

von der Beſchaffenheit zu theilen, daß das erſte größer als 2, das zweite größer als 3, das dritte größer als 4 ſei. Wenn wir alſo die Zahl 1 hälften, und zu jeder gegebenen Zahl $\frac{1}{2}$ addiren, ſo müſſen wir drei Quadrate von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das erſte größer als 2 aber kleiner als $2\frac{1}{2}$, das zweite größer als 3 aber kleiner als $3\frac{1}{2}$, das dritte größer als 4 aber kleiner als $4\frac{1}{2}$ wird. Es kommt alſo alles darauf an, daß ich mit der Zahl 10, welche aus zwei Quadraten beſteht, eine Untereintheilung in zwei Quadrate von der Beſchaffenheit vornehme, daß das eine größer als 2 und kleiner als $2\frac{1}{2}$ ſei. Wenn wir dann von dieſem Quadrat die gegebene Zahl 2 abziehen, ſo finden wir eines der geſuchten Stücke. Ferner theilen wir das andere Quadrat, woraus 10 beſteht, in zwei Quadrate von der Beſchaffenheit, daß das eine derſelben größer als 3 aber kleiner als $3\frac{1}{2}$ wird, und wenn man von dieſem Quadrat 3 abzieht, ſo findet man wieder eine der geſuchten Zahlen; auf dieſelbe Weiſe aber kann man auch die dritte geſuchte Zahl finden.

XVI. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in drei Stücke von der Beſchaffenheit theilen, daß die Summe von je zweien ein Quadrat wird.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 10. Nun ſollen die drei geſuchten Zahlen ſo beſchaffen ſein, daß die Summe der größten und mittelſten, ferner die Summe der mittelſten und kleinſten, und endlich die Summe der größten und kleinſten ein Quadrat wird. Wenn man alſo die drei Zahlen doppelt nimmt, ſo machen ſie drei Quadrate, deren jedes kleiner als 10 iſt; wenn man aber die drei geſuchten Zahlen doppelt nimmt, ſo erhält man 20. Man muß alſo 20 in drei Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 iſt. Aber die Zahl 20 beſteht aus zwei Quadraten 16 und 4. Wenn wir alſo 4 als eines der geſuchten Quadrate anſehen, ſo muß man noch 16 in zwei Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 iſt. Wir haben aber ſchon gelernt, wie man ein gegebenes Quadrat in zwei Quadrate theilen kann, daß jedes derſelben größer als 6 und kleiner als 10 ſei. Man theile alſo 16 auf dieſe Art ein, ſo iſt 20 in drei Quadrate getheilt, deren jedes kleiner als 10 iſt.

Wenn wir nun jedes dieſer Quadrate von 10 abziehen, ſo werden die Reſte die Beſchaffenheit haben, daß je zwei derſelben ein Quadrat zur Summe geben.

XVII. Aufgabe.

Man ſoll eine gegebene Zahl in vier andere von der Beſchaffenheit theilen, daß die Summe von je dreien ein Quadrat wird.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 10. Die Aufgabe verlangt, daß die Summe der erſten Zahl und der beiden folgenden ein Quadrat ſei, ferner daß die Summe der zweiten und der beiden folgenden, die Summe der dritten und der beiden folgenden, und endlich die Summe der vierten und der beiden folgenden dieſelbe Eigenſchaft habe. Die dreifache Summe der vier Zahlen beſteht alſo aus vier Quadraten; dieſe dreifache Summe iſt aber 30; daher muß ich 30 in vier Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 iſt. Dies bewerkſtelligt man aber ſo.

Ich mache den Anſatz ſo, daß ſich jedes der vier Quadrate dem Werth $\frac{30}{4}=7\frac{1}{2}$ möglichſt nähert, und wenn ich nun jedes der vier Quadrate von 10 abziehe, ſo erhalte ich die geſuchten Zahlen.

Wenn ich aber darauf achte, daß 30 die Summe der Quadrate 16, 9, 4 und 1 iſt, ſo nehme ich ſogleich 4 und 9 als zwei der geſuchten Quadrate an, da jedes derſelben kleiner als 10 iſt. Nun iſt noch übrig, daß wir 17 in zwei Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 iſt. Wenn wir aber 17, nach dem früher gezeigten Verfahren, in zwei Quadrate theilen, deren jedes größer als $8\frac{1}{2}$ und kleiner als 10 iſt, ſo werden beide Quadrate kleiner als 10 ſein. Wenn wir alſo auch dieſe beiden Quadrate von 10 abziehen, ſo erhalten wir die beiden

beiden noch fehlenden Zahlen; denn zwei derſelben haben wir bereits gefunden, nämlich 6 und 1, und ſo iſt die ganze Aufgabe gelöſ't.

XVIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Cubus ihrer Summe auch dann noch ein Cubus bleibt, wenn man jedwede der drei Zahlen dazu addirt.

Auflöſung.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen $=x$, von den geſuchten Zahlen aber ſei die erſte $=7x^3$, die zweite $=26x^3$, die dritte $=63x^3$, ſo erreicht man, daß der Cubus der Summe, wenn man jedwede Zahl dazu addirt, wieder ein Cubus wird.

Nun muß aber auch die Summe der drei Zahlen $=x$ ſein, die Summe der drei Zahlen iſt aber $96x^3$, alſo hat man die Gleichung

$$96x^3=x,$$

oder, wenn man beide Seiten durch x dividirt,

$$96x^2=1.$$

Hier iſt nun 1 eine Quadratzahl, und wenn auch 96 eine Quadratzahl wäre, ſo wäre die Auflöſung gefunden. Ich unterſuche alſo, woher 96 entſtanden iſt; es iſt offenbar die Summe von drei Zahlen, deren jede,

um 1 vermehrt, einen Cubus giebt. Es kommt jetzt alſo darauf an, drei Zahlen von der Art zu finden, daß jede derſelben, um 1 vermehrt, eine Kubikzahl, die Summe von allen dreien aber ein Quadrat wird.

Man ſetze die Wurzel des erſten Cubus $=x+1$, die des zweiten $=2-x$, die Wurzel des dritten $=2$, ſo iſt der erſte Cubus $=x^3+3x^2+3x+1$, der zweite $=-x^3+6x^2-12x+8$, und der dritte $=8$. Nun ziehe ich von jedem dieſer drei Cubi 1 ab, und ſetze die erſte Zahl $=x^3+3x^2+3x$, die zweite $=-x^3+6x^2-12x+7$, die dritte $=7$. Nun ſoll die Summe dieſer drei Zahlen, d. i. $9x^2-9x+14$ ein Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel deſſelben $=3x-4$, ſo wird $x=\frac{2}{15}$, und die erſte der geſuchten Zahlen iſt alſo $\frac{1538}{3375}$, die zweite $\frac{18077}{3375}$, und die dritte Zahl 7.

Nun kehre ich zu der eigentlichen Aufgabe zurück, und ſetze die erſte der geſuchten Zahlen $=\frac{1538}{3375}x^3$, die zweite $=\frac{18077}{3375}x^3$, und die dritte $=7x^3$; die Summe der drei Zahlen ſetze ich wieder $=x$, ſo wird

$$\frac{43740}{3375}x^3=x, \text{ oder } 43740x^3=3375x.$$

Man nehme von beiden Seiten den 15ten Theil, und dividire durch x, ſo wird

$$2916x^2=225, \text{ und } x=\frac{15}{54}.$$

Dieſen Werth ſetze man in die obigen Ausdrücke für die geſuchten Zahlen, ſo iſt die Aufgabe gelöſ't.

XIX. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Cubus ihrer Summe auch dann noch ein Cubus bleibt, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht.

Auflöſung.

Man ſetze wieder die Summe der drei Zahlen $=x$, die drei Zahlen ſelbſt aber mögen der Reihe nach $\frac{7}{8}x^3$, $\frac{26}{27}x^3$, und $\frac{63}{64}x^3$ ſein. Jetzt iſt nur noch erforderlich, daß die Summe der drei Zahlen $=x$ ſei. Man hat alſo die Gleichung

$$\frac{4877}{1728}x^3 = x,$$

oder, wenn man beide Seiten durch x dividirt,

$$\frac{4877}{1728}x^2 = 1.$$

Nun iſt 1 eine Quadratzahl, daher ſollte auch der Coefficient von x^2, d. i. $\frac{4877}{1728}$ ein Quadrat ſein. Wie iſt aber dieſer Coefficient entſtanden? Wir haben von der Zahl 3 drei Kubikzahlen abgezogen, deren jede kleiner als 1 iſt. Es kommt alſo darauf an, drei Kubikzahlen von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß jede für ſich kleiner als 1 iſt, die Summe derſelben aber, von 3 abgezogen, eine Quadratzahl zum Reſte läßt.

Es ſoll jede der drei Kubikzahlen kleiner als 1 ſein, wenn wir es daher ſo einrichten, daß die Summe von allen dreien kleiner als 1 iſt, ſo wird um ſo gewiſſer jede für ſich genommen kleiner als 1 ſein; das Quadrat aber, welches zum Reſte bleibt, wird größer als 2 ſein. Man ſetze alſo das übrig bleibende Quadrat $= 2\frac{1}{4}$, ſo muß man $\frac{3}{4}$ in drei Kubikzahlen theilen, und zwar, indem man ſtatt $\frac{3}{4}$ einen anderen Bruch ſetzt, der eine Kubikzahl zu ſeinem Nenner hat. Man wähle 216 zum Nenner, ſo muß man den Zähler 162 in drei Kubikzahlen theilen. Aber 162 beſteht aus der Kubikzahl 125, und aus dem Unterſchiede der Kubikzahlen 64 und 27. In den Porismen haben wir aber den Satz, daß der Unterſchied zweier Cubi auch alle Mal die Summe von zwei Kubikzahlen ſei.

Wir kehren alſo wieder zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, nehmen die drei gefundenen Kubikzahlen, ziehen jede von 1 ab, und nehmen den Reſt für die Coefficienten der geſuchten Zahlen, auch ſetzen wir die Summe der drei Zahlen $= x$. Durch dieſen Anſatz bewirken wir ſchon, daß der Cubus der Summe auch dann noch eine Kubikzahl bleibt, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht. Nun ſoll aber auch die Summe der drei Zahlen $= x$ ſein, die Summe der drei Zahlen iſt aber $= 2\frac{1}{4}x^3$. Man hat alſo die Gleichung

$$2\frac{1}{4}x^3 = x, \text{ und } x = \frac{8}{3}.$$

Dieſen Werth für x ſetze man in die allgemeinen Ausdrücke für die geſuchten Zahlen.

XX. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß jedwede auch dann noch ein Cubus bleibt, wenn man den Cubus ihrer Summe davon abzieht.

Auflöſung.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen $=x$, die Zahlen ſelbſt aber mögen der Reihe nach $2x^3$, $9x^3$, $28x^3$ ſein. Nun iſt nur noch erforderlich, daß die Summe dieſer drei Zahlen $=x$ ſei. Dieſe Summe iſt aber auch $=39x^3$, man hat alſo die Gleichung

$$39x^3 = x,$$

oder, wenn man beide Seiten durch x dividirt,

$$39x^2 = 1.$$

Wäre nun der Coefficient von x^2 auch eine Quadratzahl, ſo wäre die Aufgabe gelöſ't. Aber der Coefficient 39 iſt die um 3 vermehrte Summe von drei Kubikzahlen. Man muß alſo drei Kubikzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihre Summe, wenn man 3 dazu addirt, ein Quadrat wird. Man ſetze die Wurzel des erſten $=x$, die des zweiten $= 3-x$, für die Wurzel des dritten nehme man eine beliebige Zahl, z. B. -1.

Nun wird die Summe der drei Cubi $= 9x^2 - 27x + 28$, dazu addire man 3, ſo ſoll $9x^2 - 27x + 31$ ein Quadrat ſein. Man nehme $3x - 7$ als die Quadratwurzel an, ſo wird $x = \frac{6}{5}$, und dies iſt die Wurzel des erſten Cubus, die des zweiten iſt $\frac{9}{5}$, die des dritten aber 1. Zu dem Cubus dieſer Zahlen addire ich 1, und indem ich nun zu der urſprünglichen Aufgabe zurück kehre, drücke ich die drei geſuchten Zahlen durch x^3 und die eben berechneten Coefficienten aus. Nun ſoll die Summe der drei Zahlen $= x$ ſein, dieſe Summe iſt aber $11\frac{14}{25}x^3$. Man hat alſo die Gleichung

$$11\frac{14}{25}x^3 = x, \text{ und } x = \frac{5}{17}.$$

Dieſen Werth ſetze man in die obigen Ausdrücke.

XXI. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen ſuchen, deren Summe ein Quadrat iſt, und welche außerdem die Beſchaffenheit haben, daß der Cubus ihrer Summe ein Quadrat wird, wenn man jedwede der drei Zahlen dazu addirt.

Auflöſung.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen, damit ſie ein Quadrat ſei, $= x^2$, und von den geſuchten Zahlen ſei die erſte $= 3x^6$, die zweite $8x^6$, die dritte $15x^6$,

ſo erreicht man ſchon, daß der Cubus der Summe, wenn man jedwede Zahl dazu addirt, ein Quadrat wird. Nun ſoll aber auch die Summe der drei Zahlen $=x^2$ ſein, aber dieſe Summe iſt auch $26x^6$, alſo wird

$$26x^6 = x^2,$$

oder, wenn man an beiden Seiten durch x^2 dividirt,

$$26x^4 = 1.$$

Nun iſt 1 eine Quadratzahl, deren Wurzel wieder eine Quadratzahl iſt, oder ein Biquadrat, daher muß auch $26x^4$ ein Biquadrat ſein. Aber der Coefficient von x^4 iſt die Summe dreier Zahlen, deren jede, um 1 vermehrt, ein Quadrat giebt. Man muß daher drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß jede, um 1 vermehrt, ein Quadrat wird, die Summe von allen dreien aber ein Biquadrat iſt. Man ſetze die eine der geſuchten Zahlen $=x^4-2x^2$, die zweite $=x^2+2x$, und die dritte $=x^2-2x$, denn jede von dieſen drei Zahlen wird ein Quadrat, wenn man 1 dazu addirt, und außerdem iſt die Summe der drei Zahlen ein Biquadrat, folglich iſt die Aufgabe in allgemeinen Ausdrücken ſchon gelöſ't. Nun ſetze man für x die Zahl 3, ſo iſt die erſte der geſuchten Zahlen 63, die zweite 15, die dritte 3.

Nunmehr kehren wir wieder zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, und ſetzen die Summe der drei Zahlen wieder $=x^2$, von den geſuchten Zahlen aber ſei die erſte $=63x^6$, die zweite $15x^6$, die dritte $3x^6$. Nun muß

auch die Summe der drei Zahlen $= x^2$ ſein. Man hat alſo

$$81x^6 = x^2, \text{ und } x = \frac{1}{3}.$$

Das Uebrige iſt von ſelbſt klar.

XXII. Aufgabe.

Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihre Summe einer vorgeſchriebenen Zahl gleich wird, der Cubus der Summe aber, wenn man jede der drei Zahlen einzeln davon abzieht, ein Quadrat zum Reſte läßt.

Auflöſung.

* Hier kommt es wieder dahin, daß man die Zahl 2 wie vorhin zerſtückeln muß. Ferner iſt der Cubus von $2 = 8$; daher muß man jede der drei Zahlen von 8 abziehen, und die Reſte müſſen Quadrate ſein. Man muß alſo 22 in drei Quadrate theilen, deren jedes größer als 6 iſt, und wenn wir jedes derſelben von 8 abziehen, ſo finden wir die drei geſuchten Zahlen. Wir haben aber ſchon vorher gezeigt, wie man 22 in drei Quadrate theilen muß, deren jedes größer als 6 iſt.

XXIII. Aufgabe.

Man ſoll einen gegebenen Bruch in drei Brüche von der Beſchaffenheit theilen, daß ſie

Quadrate werden, wenn man den Cubus ihrer Summe davon abzieht.

Auflöſung.

Der gegebene Bruch ſei $\frac{1}{4}$, und man ſoll denſelben ſo theilen, wie es in der Aufgabe vorgeſchrieben worden; es muß alſo jeder einzelne Bruch, wenn man $\frac{1}{64}$ davon abzieht, ein Quadrat zum Reſte laſſen. Wenn man alſo von der Summe der drei Zahlen $\frac{3}{64}$ abzieht, ſo iſt der Reſt noch immer die Summe von drei Quadraten, und wenn ich zu jedem dieſer Quadrate $\frac{1}{64}$ addire, ſo finde ich jede der drei geſuchten Zahlen. Dies iſt aber ganz leicht, denn es kommt nur darauf an, den Reſt $\frac{13}{64}$ in drei Quadrate zu theilen, was gar keine Schwierigkeit hat.

XXIV. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadrate von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von allen dreien auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwedes der drei geſuchten Quadrate dazu addirt.

Auflöſung.

Das Quadrat, welches aus der Multiplication der drei geſuchten Quadrate entſtehen ſoll, ſei $=x^2$, und nun ſuchen wir zuerſt drei Quadrate, deren jedes wieder ein Quadrat wird, wenn man 1 dazu addirt. Dies kann man aber vermittelſt jedes rechtwinkligen Dreiecks bewirken. Ich nehme drei rechtwinklige Dreiecke, und dividire das Quadrat der einen Kathete durch das Quadrat der anderen, ſo finde ich die drei Quadrate; das erſte nämlich wird $=\frac{9}{16}x^2$, das zweite $=\frac{25}{144}x^2$, das dritte $=\frac{64}{225}x^2$, denn jedes dieſer Quadrate wird wieder ein Quadrat, ſo bald man noch x^2 dazu addirt.

Nun wird noch verlangt, daß das Produkt jener drei Quadrate $=x^2$ ſei; dies Produkt iſt aber $\frac{14400}{518400}x^6$. Man hat alſo

$$\frac{14400}{518400}x^6 = x^2,$$

und wenn man alles auf gleiche Benennung bringt, und durch x^2 dividirt, ſo wird

$$\frac{14400}{518400}x^4 = 1.$$

Nun ſetze man die Wurzeln beider Ausdrücke gleich, ſo wird

$$\frac{120}{720}x^2 = 1.$$

Hier iſt nun 1 eine Quadratzahl, und wenn alſo auch $\frac{120}{720}x^2$ eine Quadratzahl wäre, ſo wäre die Aufgabe gelöſ't. Dies iſt aber nicht der Fall, und es kommt alſo darauf an, drei rechtwinklige Dreiecke von der Beſchaffenheit zu finden, daß das Produkt ihrer Lothe mit dem Produkt ihrer Grundlinien multiplicirt, ein Quadrat wird. Dies Quadrat wird alſo das Produkt aus den Katheten eines dieſer Dreiecke zum Faktor haben, und wenn wir daher alles durch das Produkt aus den Katheten des einen dieſer Dreiecks dividiren, ſo erhalten wir ein Produkt, welches das Produkt aus den Katheten des zweiten Dreiecks, und das Produkt aus den Katheten des dritten zu ſeinen Faktoren hat. Wenn wir alſo das eine dieſer Dreiecke durch die Zahlen 3, 4 und 5 ausdrücken, ſo kommt es darauf an, zwei rechtwinklige Dreiecke von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß das Produkt aus den Katheten des einen Dreiecks von dem Produkt der Katheten des anderen irgend ein Zwölffaches, alſo auch die Fläche des einen von der Fläche des anderen ein Zwölffaches ſei. Wenn ſie aber ein Zwölffaches ſein muß, ſo darf ſie auch ein Dreifaches ſein, und die Auflöſung iſt ganz leicht. Das eine Dreieck iſt nämlich 9, 40, 41, das andere 8, 15, 17.

Nachdem wir alſo die rechtwinkligen Dreiecke gefunden haben, ſo kehren wir zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, und ſetzen das eine der drei geſuchten Quadrate $= \frac{9}{16}x^2$, das andere $= \frac{64}{225}x^2$, das dritte $= \frac{81}{1600}x^2$, und

wenn wir das Produkt dieſer drei Zahlen $= x^2$ ſetzen, ſo erhalten wir den Werth von x in rationalen Zahlen. Dieſen Werth ſetze man in die obigen allgemeinen Ausdrücke.

XXV. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadrate von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von allen dreien auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedes der drei Quadrate davon abzieht.

Auflöſung.

Das Produkt der drei geſuchten Quadrate ſei $= x^2$, und nun entnehme man die Coefficienten der drei geſuchten Quadrate wieder von rechtwinkligen Dreiecken, der eine ſei $\frac{16}{25}$, der zweite $\frac{25}{169}$, der dritte $\frac{64}{289}$. Ich verbinde ſie mit der Hauptgröße x^2, ſo giebt x^2, wenn man jedwede der drei geſuchten Zahlen davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reſte.

Nun ſoll aber das Produkt der drei Zahlen $= x^2$ ſein, dies Produkt iſt aber auch $= \frac{25600}{1221025} x^6$; man hat alſo die Gleichung

$$\frac{25600}{1221025} x^6 = x^2,$$

und, wenn man alles durch x^2 dividirt, ſo wird

$$\frac{25600}{1221025} x^4 = 1.$$

Nun iſt 1 ein Quadrat, welches zu ſeiner Wurzel wieder ein Quadrat hat; es ſollte alſo auch $\frac{25600}{1221025} x^4$ ein Quadrat ſein, welches ein Quadrat zu ſeiner Wurzel hat. Es kommt alſo wieder darauf an, drei rechtwinklige Dreiecke von der Beſchaffenheit zu finden, daß das Produkt der Lothe mit dem Produkt der Hypotenuſen multiplicirt ein Quadrat gebe, welches ein Quadrat zu ſeiner Wurzel hat.

Wenn ich nun alles durch das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuſe eines dieſer Dreiecke dividire, ſo erhalte ich ein Produkt, welches das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuſe des zweiten Dreiecks und das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuſe des dritten rechtwinkligen Dreiecks zu ſeinen Faktoren hat. Das eine rechtwinklige Dreieck ſei 3, 4, 5, ſo kommt es darauf an, zwei rechtwinklige Dreiecke von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuſe des einen 20 Mal größer ſei, als das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuſe des anderen. Wenn es aber 20 Mal größer ſein muß, ſo darf es auch 5 Mal größer ſein.

Dies iſt aber ganz leicht. Das größere Dreieck iſt nämlich 5, 12, 13; das kleinere 3, 4, 5. Aus dieſen beiden Dreiecken muß man alſo zwei andere Dreiecke ableiten, welche die erforderte Eigenſchaft haben. — — — — — Nachdem wir dieſe Dreiecke in den kleinſten Zahlen gefunden haben, ſo kehren wir zu der urſprüng-

lichen Aufgabe zurück, und ſetzen das Produkt der drei geſüchten Quadrate $= x^2$, von den drei geſuchten Quadraten aber ſetzen wir das erſte $= \frac{16}{25}x^2$, das zweite $= \frac{576}{625}x^2$, das dritte $= \frac{14400}{28561}x^2$.

Jetzt iſt nur noch erforderlich, daß man das Produkt der drei Zahlen $= x^2$, alſo auch die Wurzeln von beiden einander gleich ſetze, ſo findet man $x = \frac{65}{48}$.

Dieſen Werth ſetze man in die obigen allgemeinen Ausdrücke.

XXVI. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ihr Produkt, von jedweder Zahl abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reſte läßt.

Auflöſung.

Man ſetze das Produkt der drei Zahlen $= x^2$, die Coefficienten der Zahlen ſelbſt entnehme man wieder von beliebigen rechtwinkligen Dreiecken. Aber auch hier kommt es wieder dahin, daß man rechtwinklige Dreiecke von der Beſchaffenheit, wie in der vorigen Aufgabe, ſuchen muß.

Wenn wir alſo die nämlichen Dreiecke beibehalten, ſo ſetze ich das eine der geſuchten Quadrate $= \frac{25}{16}x^2$,

das zweite $=\frac{625}{576}x^2$, das dritte $\frac{28561}{14400}x^2$, und nun läßt das Produkt der drei Zahlen von jedweder Zahl abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reſte. Nun iſt noch erforderlich, daß man das Produkt der drei Zahlen $=x^2$ ſetze, daraus aber findet man $x=\frac{48}{65}$.

XXVII. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien, wenn man 1 dazu addirt, wieder ein Quadrat wird.

Aufloͤſung.

Ich verlange zuerſt, daß das Produkt der erſten und zweiten Zahl ein Quadrat werde, wenn man 1 dazu addirt. Man multiplicire alles mit der dritten Zahl, welche auch ein Quadrat iſt; alſo muß das Produkt der erſten und zweiten Zahl mit der dritten multiplicirt, d. h. das Produkt aller drei Zahlen ein Quadrat werden, wenn man die dritte Zahl, und eben ſo auch, wenn man die erſte oder zweite Zahl dazu addirt. Dieſe Aufgabe haben wir aber ſchon vorher gelöſ't, und die dort gefundenen Zahlen leiſten auch, was die gegenwärtige Aufgabe vorſchreibt.

XXVIII. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien, wenn man 1 davon abzieht, wieder ein Quadrat wird.

Auflöſung.

Man multiplicire alles mit der dritten Zahl, ſo muß das Produkt der erſten und zweiten Zahl, mit der dritten multiplicirt, d. h. das Produkt aus allen drei Zahlen ein Quadrat werden, wenn man die dritte Zahl davon abzieht, und eben dies Produkt muß auch ein Quadrat werden, wenn man die zweite oder die erſte Zahl davon abzieht. Dieſe Aufgabe haben wir aber ſchon vorher gelöſ't, und die dort gefundenen Zahlen leiſten auch, was die gegenwärtige Aufgabe vorſchreibt.

XXIX. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt von je zweien, wenn man es von 1 abzieht, ein Quadrat zum Reſte läßt.

Auflöſung.

Wir verlangen hier wieder, daß das Produkt von je zweien, wenn man es von 1 abzieht, ein Quadrat werde.

werde. Wenn wir nun alles mit der dritten Zahl multipliciren, ſo kommt es wieder dahin, daß wir drei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen müſſen, daß das Produkt von allen dreien, von jedweder Zahl abgezogen, ein Quadrat zum Reſte läßt. Dieſe Aufgabe haben wir aber ſchon vorher gelöſ't.

XXX. Aufgabe.

Man ſoll zu einer gegebenen Zahl drei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 15, und das eine der geſuchten Quadrate ſei 9. Man muß alſo noch zwei andere Quadrate ſuchen, deren jedes mit der Zahl 24, und deren Summe mit der Zahl 15 zuſammen genommen ein Quadrat macht. Man ſuche alſo zuerſt zwei Quadrate, deren jedes mit der Zahl 24 ein Quadrat macht. Wir nehmen alſo Zahlen, welche Faktoren der Zahl 24, und zugleich Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ſind. Der eine Faktor von 24 ſei $= \frac{4}{x}$, ſo iſt der zugehörige Faktor $= 6x$; die Hälfte des einen Faktors iſt $= \frac{2}{x}$, die Hälfte des anderen $= 3x$. Ferner ſei ein Faktor

von $24 = \frac{3}{x}$, ſo iſt der zugehörige Faktor $= 8x$, und die Hälfte des einen $= \frac{3}{2x}$, die Hälfte des anderen $= 4x$. Nun ſei die Wurzel des einen Quadrats $= 3x - \frac{2}{x}$, die Wurzel des anderen $= 4x - \frac{3}{2x}$, denn ſo wird jedes der beiden Quadrate mit der Zahl 24 wieder ein Quadrat bilden.

Nun iſt noch die Bedingung übrig, daß auch die Summe der beiden Quadrate mit der Zahl 15 wieder ein Quadrat geben ſoll. Dieſe Rechnung aber giebt $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2} + 25x^2 - 9$, oder $\frac{25}{4x^2} + 25x^2 - 9$, und dieſer Ausdruck muß alſo ein Quadrat ſein. Man ſetze

$$\frac{25}{4x^2} + 25x^2 - 9 = 25x^2,$$

ſo wird $x = \frac{5}{6}$, und dieſen Werth ſetze man in die allgemeinen Ausdrücke.

XXXI. Aufgabe.

Man ſoll zu einer gegebenen Zahl drei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 13, und das eine der geſuchten Quadrate ſei 25. Man muß alſo zwei andere

Quadrate von der Beſchaffenheit ſuchen, daß jedes derſelben mit der Zahl 12 wieder ein Quadrat wird, die Summe von beiden aber ein Quadrat zum Reſte läßt, wenn man die Zahl 13 davon abzieht.

Wir nehmen hier wieder die Faktoren der Zahl 12, die ſich durch die Diviſion mit 3 und 4 ergeben, und die Wurzel des erſten Quadrats wird $=\frac{3x}{2}-\frac{2}{x}$, die Wurzel des anderen $=2x-\frac{3}{2x}$, und nun geben beide Quadrate, wenn man 12 dazu addirt, wieder ein Quadrat zur Summe.

Nun iſt noch erforderlich, daß die Summe beider, wenn man 13 davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reſte läßt. Die Rechnung giebt aber $\frac{25}{4x^2}+\frac{25x^2}{4}-25$, alſo muß dieſer Ausdruck ein Quadrat ſein. Man ſetze

$$\frac{25}{4x^2}+\frac{25x^2}{4}-25=\frac{25}{4x^2},$$

ſo wird $x=2$. Dieſen Werth ſetze man in die allgemeinen Ausdrücke.

XXXII. Aufgabe.

Man ſoll drei Quadratzahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe ihrer Quadrate wieder ein Quadrat wird.

Auflöſung.

Man ſetze die erſte der geſuchten Zahlen $= x^2$, die zweite $= 4$, die dritte $= 9$, ſo wird die Summe ihrer Quadrate $= x^4 + 97$. Dies ſetze man einem Quadrat von der Wurzel $x^2 - 10$ gleich, ſo wird

$$20x^2 = 3.$$

Wenn nun durch Multiplication beider Ausdrücke ein Quadrat entſtände, ſo wäre die Aufgabe gelöſ't. Es kommt alſo darauf an, zwei Quadrate und zu dieſen eine dritte Zahl von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß das Quadrat dieſer Zahl, wenn man die Quadrate der beiden geſuchten Quadratzahlen davon abzieht, einen Reſt laſſe, der ſich zu dem Doppelten der anfänglich genommenen Zahl wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhalte.

Man ſetze alſo das eine der geſuchten Quadrate $= x^2$, das zweite $= 4$, und nehme dazu willkührlich eine dritte Zahl $= x^2 + 4$. Wenn man nun von dem Quadrat dieſer willkührlichen Zahl die Quadrate der beiden Quadratzahlen abzieht, ſo iſt der Reſt $= 8x^2$. Dieſer Reſt ſoll nun zu dem Doppelten der willkührlichen Zahl $2x^2 + 8$ ſich wie ein Quadrat zu einem Quadrate verhalten.

Man dividire beide Ausdrücke durch 2, ſo ſoll auch $4x^2$ zu $x^2 + 4$ ſich wie ein Quadrat zu einem Quadrate verhalten. Nun iſt $4x^2$ ein Quadrat, daher muß auch $x^2 + 4$ ein Quadrat ſein.

Die Wurzel dieſes Quadrats ſei $= x + 1$, ſo wird $x = 1\frac{1}{2}$; alſo iſt das eine der geſuchten Quadrate $= 2\frac{1}{4}$, das andere $= 4$, die willkührlich genommene Zahl aber $= \frac{5}{4}$. Man multiplicire aber alles mit 4, ſo iſt das eine Quadrat $= 9$, das andere $= 16$, und die willkührliche Zahl $= 25$.

Jetzt kommen wir wieder auf die urſprüngliche Aufgabe, und ſetzen die eine der geſuchten Quadratzahlen $= x^2$, die zweite $= 9$, die dritte $= 16$, ſo iſt die Summe ihrer Quadrate $= x^4 + 337$. Nun nehme man $x^2 - 25$ als Wurzel dieſes Quadrates an, ſo wird $x = \frac{12}{5}$. Das Uebrige iſt für ſich ſelbſt klar.

XXXIII. Aufgabe.

Zweierlei Wein, acht Drachmen das Maaß, und ſchlechtern zu fünf nur,
Miſchte der gütige Herr ſeinen Bedienten zum Feſt.
Was er als Preis für beides bezahlt, war eine Quadratzahl,
Legſt du zu dem Quadrat aber noch Sechzig hinzu,
Siehe ſo haſt du ein zweites Quadrat; nun merke, die Wurzel

Zeigt dir wie viel Maaß jener im Ganzen gekauft.
Und nun ſage mir an, wie viel des beſſeren Weines,
Und wieviel zu fünf, wurde zuſammen gemiſcht?

Auflöſung.

Der Sinn dieſes Epigramms iſt folgender. Es hat Jemand zwei Fäſſer Wein gekauft; von dem einen koſtet das Maaß acht Drachmen, von dem andern nur fünf. Der Preis für beide zuſammen genommen iſt eine Quadratzahl, und wenn man zu dieſer Zahl noch 60 addirt, ſo erhält man wieder ein Quadrat, und die Wurzel des letztern zeigt, wie viel Maaß in beiden Fäſſern waren. Nun ſoll man angeben, wie viel Maaß zu acht, und wie viel Maaß zu fünf Drachmen gekauft worden ſind.

Man ſetze die Zahl der gekauften Maaße $= x$, ſo iſt der Preis $= x^2 - 60$. Es ſoll aber $x^2 - 60$ eine Quadratzahl ſein, und als Wurzel deſſelben muß man x weniger einer beliebigen Zahl annehmen. Es beſteht aber $x^2 - 60$ aus zwei Zahlen, nämlich dem Preiſe des Weines zu 8, und des Weines zu 5 Drachmen, und ein Fünftel des letzteren Preiſes zeigt die Zahl der Maaße zu 5 Drachmen an, und ein Achtel des erſteren Preiſes zeigt die Zahl der Maaße zu 8 Drachmen an;

aber die Zahl der ſämmtlichen Maaße iſt $=x$. Man muß alſo x^2-60 in zwei Zahlen von der Beſchaffenheit theilen, daß ein Fünftel der einen und ein Achtel der anderen $=x$ ſei. Dies iſt aber nicht möglich, wenn nicht x größer als $\frac{x^2-60}{8}$, und kleiner als $\frac{x^2-60}{5}$, alſo x^2-60 größer als $5x$, und kleiner dagegen als $8x$ wird. Da nun x^2-60 größer als $5x$ iſt, ſo addire man an beiden Seiten 60, ſo wird x^2 größer als $5x+60$, und x^2 iſt $=5x$ und einer Zahl die kleiner als 60 iſt. Daher muß x größer oder wenigſtens nicht kleiner als 11 ſein. Da ferner x^2-60 kleiner als $8x$ iſt, ſo addire man an beiden Seiten 60, ſo wird $x^2=8x$ und einer Zahl, welche kleiner als 60 iſt, daher darf x nicht größer als 12 werden. Wir haben aber auch gezeigt, daß es nicht kleiner als 11 werden dürfe, alſo muß der Werth von x größer als 11, und kleiner als 12 ſein.

Wenn wir aber x^2-60 zu einem Quadrat machen wollen, ſo müſſen wir x weniger einer gewiſſen Zahl als Wurzel anſehen, und wir erhalten den Werth von x, indem wir eine gewiſſe Zahl ins Quadrat erheben, dazu 60 addiren, und die Summe durch das Doppelte der noch nicht beſtimmten Zahl dividiren. Es kommt alſo darauf an: eine Zahl von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß, wenn zu ihrem Quadrate noch 60 addirt und die Summe durch das Doppelte der Zahl dividirt wird, der Quotient größer als 11 und kleiner als 12 werde. Wir wollen dieſe Zahl $=x$ ſetzen, ſo ſoll $\frac{x^2+60}{2x}$ größer

als 11, aber auch kleiner als 12 ſein. Daher muß x^2+60 größer als $22x$, und $22x$ ſo groß als x^2 und eine gewiſſe Zahl ſein, welche kleiner als 60 iſt, und daher darf x nicht kleiner als 19 ſein. Es ſoll aber auch der Quotient $\frac{x^2+60}{2x}$ kleiner als 12 ſein, daher iſt x^2+60 kleiner als $24x$; und $24x$ iſt ſo groß als x^2 und eine gewiſſe Zahl, die größer als 60 iſt; daher muß x kleiner als 21 ſein. Wir haben aber auch geſehn, daß es größer als 19 ſein müſſe. Wenn wir alſo x^2-60 zu einem Quadrat machen wollen, ſo müſſen wir die Wurzel $=x-20$ ſetzen, und ſo findet man $x=11\frac{1}{2}$, folglich $x^2=132\frac{1}{4}$; davon ziehe ich 60 ab, ſo bleibt $72\frac{1}{4}$. Man muß alſo $72\frac{1}{4}$ in zwei Zahlen von der Beſchaffenheit theilen, daß ein Fünftel der erſteren und ein Achtel der letzteren $=11\frac{1}{2}$ wird. Nun ſei das Fünftel der erſteren $=x$, ſo iſt das Achtel der letzteren $11\frac{1}{2}-x$. Daraus findet man die Zahlen ſelbſt, die eine $=5x$, die andere $=92-8x$, und die Summe beider ſoll $72\frac{1}{4}$ ſein; folglich iſt

$$92-3x=72\frac{1}{4}, \text{ und } x=\frac{72}{12}.$$

Die Zahl der Maaße, deren jedes fünf Drachmen koſtete, iſt alſo $\frac{79}{12}$, die Zahl der Maaße zu acht Drachmen iſt $\frac{57}{12}$, und das Uebrige iſt für ſich klar.

Anhang zum fünften Buch.

I.

Edler Pythagoras, ſage mir an, wie viele der
Jünger
Zählt Dein Haus, die dem Dienſt ſich weihn der
unſterblichen Götter?
Sagen will ich es Dir, o Polykrates! Siehe
die Hälfte
Weiht ſich der herrlichen Mathematik, ein Vier-
tel erforſchet
Eifrig die Tiefen der ewgen Natur; ein Sieben-
tel übt noch
Schweigend die Kraft des Gemüths und horcht
der ſinnigen Rede;
Dann der Jungfrau'n drei, doch herrlich vor al-
len Theano;
So viel führ ich der Jünger zum Born der ewi-
gen Wahrheit.

II.

Sage den Stand der Planeten mir an und der übrigen Sterne,
Ob zu glücklicher Zeit geſtern die Gattinn gebar.
Tag noch war's, zwei Siebentel nimm der verfloſſenen Frühzeit,
Sechs Mal gleichviel Zeit weilete Helios noch.

III.

Cypris redete jüngſt den Sohn mit tröſtendem Wort an:
Sprich, mein Sohn, was trauert Dein Herz? Und jener erwiedert:
Haben die Muſen mir nicht die Aepfel geraubt, herſtürmend,
Dieſe von hier, und jene von dort, vom Helikon kam ich.
Klio nahm ſich ein Fünftel zuerſt, ein Zwölftel Euterpe,
Dann noch ein Achtel entriß mir ſcherzend die loſe Thalia,
Nur ein Zwanzigſtel nahm Melpomene, aber ein Viertel

Fiel Terpſichoren zu, und ein Siebentel nahm
ſich Erato.
Dreißig eignete ſich Polyhymnia zu, die Beſcheidne,
Hundert und Zwanzig Urania gar, Kalliope
endlich
Ging drei hundert Aepfel im Schooß hohnlachend
von dannen.
Und nun komm ich zurück, ein armer geplünderter Pilger,
Funfzig blieben mir noch. Wie viel doch hatt'
ich zu Anfang?

IV.

Trugen die Grazien jüngſt Fruchtkörbe mit goldenen Aepfeln,
Jegliche trug gleichviel. Da begegneten ihnen
die Muſen,
Neun, und wünſchten ſich Obſt, und die gütigen
Grazien theilten
Gleich viel jeglicher mit. Gleich viel dann hatten die Zwölfe.
Sage, wie viel ſie vertheilt, um gleich viel alle
zu haben.

V.

Nimm von der Schaale Gewicht ein Drittel zuerſt und ein Viertel,
Sinniger Künſtler, und dann füge das Zwölftel hinzu.
Bring' ins Feuer das Gold, und haſt du es richtig getroffen,
Ziehſt du die Maſſe zurück, wiegt ſie ein richtiges Pfund.

VI.

A. Der zweiten und der dritten Drittheil wieg' ich auf.
B. Die dritte und der erſten Drittheil ſteckt in mir.
C. Zehn Pfund in mir und dann der erſten Drittheil noch.

VII.

Die tauſend Stater, welche mir mein Fleiß erwarb,
Vertheil' ich unter meine beiden Söhne ſo:

Von des rechten Sohnes Erbtheil ſei ein Fünftel ſchon
Um zwanzig größer als des Baſtards vierter Theil.

VIII.

Sechs Pfund ſchwer, ſechs Schaalen von Gold verehrete Krôſus,
Aber ein einziges Loth ſteckte in jeglicher mehr.

IX.

Warum droheſt Du mir mit Schlägen wegen der Nüſſe?
Haben die artigen Mädchen ſie doch, o Mutter, getheilet.
Zwei Mal nahm ein Siebentel weg die holde Meliſſe,
Titane hat ein Zwölftel erlangt. Das Sechstel und Drittel
Haben Aſtyoche ſchäkernd getheilt und die loſe Philinne.
Zwanzig eignete Thetis ſich zu, zwölf andere Thisbe,

Lachend zeigte mir Glauka die Hand, drin waren der Nüſſe
Eilf an der Zahl, da behielt ich für mich die einzige Nuß hier.

X.

Kind, wie haſt Du die Aepfel verthan? Ein Sechstel hat Ino,
Semelen ſchenkt' ich ſelbſt willig ein Achtel davon.
Raubt mir Autonoe drauf ein Viertel; die loſe Agave
Reißet den Schooß mir auf, nimmt ſich ein Fünftel und flieht.
Dir ſelbſt hob ich die zehn hier auf. Nun aber ich ſelber,
Cypris bezeuget es mir, habe den einzigen nur.

XI.

Schwer bepackt ein Eſelchen ging und des Eſelchens Mutter;
Und die Eſelin ſeufzete ſchwer, da ſagte das Söhnlein:

Mutter, was klagſt und ſtöhneſt Du doch wie ein
jammerndes Mägdlein;
Gieb ein Pfund mir ab, ſo trag ich doppelte
Bürde,
Nimmſt Du es aber von mir, gleich viel dann
haben wir beide.
Rechne mir aus, wenn du kannſt, mein Beſter,
wie viel ſie getragen.

XII.

Wir beide hier, wir wiegen grade zwanzig Pfund,
Ich Zethus und Amphion, aber nimmſt du nur
Von mir ein Drittel und von dem den vierten
Theil,
So haſt du ſechs, ſo viel als unſre Mutter wiegt.

XIII.

A. Zehn Pfund gieb mir, ſo hab' ich dreifach
deine Zahl.
B. Gieb du ſo viel, fünf Mal hab' ich die
Deinige.

XIV.

Ha Polyphem der Cyclop! Wie kunſtreich ſteht
er in Erz da!
Aug' und Hand und Mund, alles iſt ſinnig
geformt.
Denn inwendig verſteckt ſind künſtlich geordnete
Röhren,
Und aus jeglicher quillt kühlendes Waſſer
empor;
Doch nicht ordnungslos. Drei Tage ſtrömet die
Rechte,
Bis ſie das Becken allein, hoch bis zum
Rande gefüllt.
Ein Tag gnüget dem Aug' allein, zwei Fünftel
dem Munde.
Sage doch, wie viel Zeit brauchen ſie alle
zugleich?

XV.

A. Zwei Pfund gieb mir, ſo trag ich doppelt
Deine Laſt.
B. Gieb Du ſo viel, und vierfach hab ich
Deine dann.

XVII.

Wie doch kühlenden Trank die Drei, die Göttlichen, ſpenden,
Zwei Flußgötter und dort **Bromios** heilige Kraft.
Doch nicht Jeglicher gießt gleich ſtark; den einzigen Tag nur
Braucht der gewaltige Nil, bis er das Becken gefüllt;
Alſo entquillt es der Bruſt. Drei Tage ſtrömet der **Thyrſus**,
Bis er das Becken allein perlenden Weines gefüllt.
Zwei gebrauchet dein Horn, **Achelous**! aber zugleich jetzt
Fließt, und in kürzerer Zeit füllet das Becken mir an.

XVIII.

Sage wie viel Seemeilen die Fahrt noch währet, ſo fragt' einſt
Ein Seefahrender Mann auf **Adrias** tobenden Fluthen.

Und der Schiffsherr ſprach — von Kreta's Felſengeſtade,
Bis zum ſicheren Port am ſiciliſchen Berge Pelorum,
Zählt man der Tauſende ſechs, und was des Weges noch übrig,
Sind vier Fünftel der Fahrt, die vollendet hinter uns daliegt.

XIX.

Geht denn Gewalt vor Recht? uns Beiden ließ ja der Vater
Fünf Talente zurück; aber wie theilet man ſie!
Wenn vier Eilftel der Bruder verſchenkt, ſo bleibt er noch immer
Fünfmal reicher als ich. Schläfſt Du, o waltender Zeus?

XX.

Wachet ihr Mädchen doch auf! denn von drei Achteln der Stunden,
Welche der Tag noch währt, habt ihr ein Fünftel verſäumt.

XXI.

Wie Du o Weib die Noth doch verhehlſt? Sie
aber, ſie laſtet
Schwer auf Dir, und legt quälende Mühe
Dir auf.
Ein Pfund ſpanneſt Du ſonſt tagtäglich, die ältere
Tochter
Spann ein Drittheil noch über das tägliche
Pfund.
Nur ein halb Pfund ſpann die jüngere Tochter,
und jetzund
Giebt ein einziges Pfund allen das kärg-
liche Mahl.

XXII.

Duldeſt Du denn, o ewiger Zeus, der theſſali-
ſchen Weiber
Unfug, wie ſie den Glanz der milden Selene
verdunkeln?
Selber ſah ich es jüngſt mit Graun; noch war
es zum Morgen
Doppelt ſo viel als zwei Sechstel der Nacht
und ein Siebentel austrug.

XXIII.

A. Sage die Stunde mir an, Diodor, ſternkundiger Künſtler,
Seit vom Aufgang Helios Strahl den hohen Gnomon traf?
B. Vier Mal noch drei Fünftel des eben vollendeten Weges
Sind zurück, dann tauchet er ſich ins weſtliche Meer ein.

XXIV.

Hier dies Grabmal deckt Diophantus ſterbliche Hülle,
Und in des Trefflichen Kunſt zeigt es ſein Alter Dir an.
Knabe zu ſein gewährt ihm der Gott ein Sechstel des Lebens,
Und ein Zwölftel der Zeit ward er ein Jüngling genannt.
Noch ein Siebentel ſchwand, da fand er des Lebens Gefährtinn,
Und vier Jahre darauf ward ihm ein liebliches Kind.

Digitized by Google

Halb nur hatte der Sohn des Vaters Alter vollendet,
Als ihn plötzlich der Tod ſeinem Erzeuger entriß.
Noch vier Jahre betrauert' er ihn in ſchmerzlichem Kummer.
Und nun ſage das Ziel, welches er ſelber erreicht!

Sechstes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Hypotenuſe eine Kubikzahl wird, wenn man jedwede der beiden Katheten davon abzieht.

Auflöſung.

Das geſuchte Dreieck ſei aus zwei Zahlen gebildet, die eine dieſer Zahlen ſei x, die andere 3, ſo iſt die Hypotenuſe $= x^2 + 9$, das Loth $= 6x$, und die Grundlinie $= x^2 - 9$. Zieht man nun die eine der Katheten, nämlich $x^2 - 9$, von der Hypotenuſe ab, ſo erhält man 18, aber dieſe Zahl iſt keine Kubikzahl.

Wie iſt aber die Zahl 18 entſtanden? Sie iſt das doppelte Quadrat der Zahl 3. Es kommt alſo darauf an, eine Zahl zu finden, deren doppeltes Quadrat eine

Kubikzahl wird. Die geſuchte Zahl ſei x, ſo ſoll $2x^2$ eine Kubikzahl ſein. Man ſetze

$$2x^2 = x^3, \text{ ſo wird } x = 2.$$

Nunmehr bilde ich das geſuchte Dreieck, nicht wie zuerſt von den Zahlen x und 3, ſondern von x und 2, ſo wird die Hypotenuſe $= x^2 + 4$, das Loth $= 4x$, die Grundlinie $= x^2 - 4$, und nun wird die Hypotenuſe eine Kubikzahl, wenn man Grundlinie davon abzieht.

Nun ſoll aber auch eine Kubikzahl herauskommen, wenn man das Loth $4x$ von der Hypotenuſe abzieht, alſo der Reſt $x^2 - 4x + 4$ ſoll eine Kubikzahl ſein. Dieſer Reſt iſt auch das Quadrat von $x - 2$. Wenn wir alſo $x - 2$ einer Kubikzahl gleich ſetzen, ſo iſt die Aufgabe gelöſ't. Es ſei alſo

$$x - 2 = 8, \text{ ſo wird } x = 10.$$

Das geſuchte Dreieck wird alſo von den Zahlen 10 und 2 gebildet, ſeine Hypotenuſe wird 104, das Loth 40, die Grundlinie 96, und die Auflöſung leiſtet, was verlangt wurde.

II. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Hypotenuſe eine Kubikzahl wird, wenn man jedwede der beiden Katheten dazu addirt.

Auflöſung.

Wenn wir das geſuchte Dreieck, wie in der vorigen Aufgabe, von zwei Zahlen bilden, ſo müſſen wir wieder ein Quadrat ſuchen, deſſen Doppeltes eine Kubikzahl wird; dieſe Eigenſchaft hat aber das Quadrat der Zahl 2. Wir bilden alſo das geſuchte Dreieck von den Zahlen x und 2, ſo wird, wie vorher, die Hypotenuſe $= x^2 + 4$, die eine Kathete $= 4x$, die andere $= 4 - x^2$.

Nun ſoll die Hypotenuſe aber auch eine Kubikzahl werden, wenn man die erſte Kathete dazu addirt; auch muß, wenn wir den Werth für x berechnet haben, und dieſen in die obigen Ausdrücke ſetzen, x^2 kleiner als 4, folglich x kleiner als 2 werden. Wir müſſen alſo einen Cubus ſuchen, der kleiner als 4, aber größer als 2 iſt; ein ſolcher Cubus iſt aber $\frac{27}{8}$. Daher ſetze man

$$x + 2 = \frac{27}{8}, \text{ ſo wird } x = \frac{11}{8}.$$

Die Hypotenuſe iſt alſo $\frac{377}{64}$, die eine Kathete $\frac{135}{64}$, die andere $\frac{352}{64}$.

III. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die durch eine

Zahl ausgedrückte Fläche deſſelben ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeſchriebene Zahl dazu addirt.

Aufl öſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 5. Man nehme an, das Dreieck ſei ſeiner Geſtalt nach gegeben, und habe die Seiten $3x$, $4x$ und $5x$; ſo wird die Fläche, wenn man 5 dazu addirt $= 6x^2 + 5$. Dies ſoll ein Quadrat ſein; man ſetze alſo $6x^2 + 5 = 9x^2$, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, ſo bleibt $3x^2 = 5$.

Nun müßten ſich dieſe beiden Ausdrücke an ſich, und eben ſo auch ihre Coefficienten, wie zwei Quadrate gegen einander verhalten. Es kommt alſo darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck und dazu ein Quadrat von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß, wenn man die Fläche des Dreiecks von dem Quadrate abzieht, der Reſt der fünfte Theil eines Quadrats ſei, weil nämlich 5 die gegebene Zahl iſt.

Man bilde alſo ein Dreieck von den Zahlen x und $\frac{1}{x}$, ſo wird die Fläche deſſelben $x^2 - \frac{1}{x^2}$. Die Wurzel des geſuchten Quadrats ſei $= x$, und einem Bruche mit dem Nenner x, und mit einem Zähler, welcher doppelt ſo groß als die gegebene Zahl iſt, alſo $= x + \frac{10}{x}$, das Quadrat wird alſo $= x^2 + \frac{100}{x^2} + 20$, und wenn man davon die

Fläche des Dreiecks nämlich $x^2 - \frac{1}{x^2}$ abzieht, ſo bleibt $\frac{101}{x^2} + 20$. Dies multiplicire man mit 5, ſo ſoll $\frac{505}{x^2} + 100$ ein Quadrat ſein. Man multiplicire ferner mit x^2, ſo muß auch $100x^2 + 505$ ein Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel $= 10x + 5$, ſo wird

$$100x^2 + 505 = + 100x^2 + 100x + 25, \text{ und } x = \frac{24}{5}.$$

Das geſuchte Dreieck muß alſo von den Zahlen $\frac{24}{5}$ und $\frac{5}{24}$ gebildet werden, und die Wurzel des geſuchten Quadrats muß $\frac{413}{60}$ ſein.

Wenn ich alſo in der urſprünglichen Aufgabe das geſuchte Dreieck durch x und die hier berechneten Coefficienten ausdrücke, und die um 5 vergrößerte Fläche des Dreiecks $= \frac{170569}{3600}x^2$ ſetze, ſo iſt alles Uebrige von ſelbſt klar.

IV. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeſchriebene Zahl davon abzieht.

Auflöſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 6, und man nehme wieder an, das Dreieck ſei ſeiner Geſtalt nach gegeben, und habe die Seiten 3x, 4x und 5x. Nun ſoll nach

den Bedingungen der Aufgabe $6x^2-6$ ein Quadrat ſein; man ſetze alſo $6x^2-6=4x^2$, ſo kommt es wieder darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck und ein Quadrat von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß, wenn man das Quadrat von der Fläche des Dreiecks abzieht, der Reſt, ſechs Mal genommen, ein Quadrat wird.

Man bilde alſo das Dreieck von x und $\frac{1}{x}$, die Wurzel des geſuchten Quadrates ſei x weniger einem einfachen Bruch, der die Hälfte der gegebenen Zahl zu ſeinem Zähler hat, alſo $=x-\frac{3}{x}$. Das Quadrat wird alſo $=x^2+\frac{9}{x^2}-6$, und wenn wir dieſes von der Fläche des Dreiecks oder von $x^2-\frac{1}{x^2}$ abziehn, ſo bleibt $6-\frac{10}{x^2}$. Wenn man dieſen Reſt ſechs Mal nimmt, und dann alles mit x^2 multiplicirt, ſo ſoll $36x^2-60$ ein Quadrat ſein. Die Wurzel deſſelben ſei $6x-2$, ſo wird

$$36x^2-60=36x^2-24x+4, \text{ alſo } x=\frac{8}{3}.$$

Das Dreieck wird alſo von den Zahlen $\frac{8}{3}$ und $\frac{3}{8}$ gebildet, und die Wurzel des geſuchten Quadrats iſt $\frac{37}{24}$. Wenn ich nun hieraus die Seiten des Dreiecks gefunden habe, ſo multiplicire ich (um die urſprüngliche Aufgabe zu löſen) alle Seiten mit x, und wenn ich jetzt den vorigen Gang der Auflöſung beibehalte, ſo finde ich für x einen rationalen Werth.

V. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben, von einer vorgeſchriebenen Zahl abgezogen, ein Quadrat zum Reſte läßt.

Auflöſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 10, und man nehme zuerſt wieder $3x$, $4x$ und $5x$ als die Seiten des geſuchten Dreiecks an. Nun ſoll $10-6x^2$ ein Quadrat ſein, und wenn ich dieſen Ausdruck einem Produkt aus x^2 und einem quadratiſchen Coefficienten gleich ſetze, ſo kommt es wieder darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck und eine Quadratzahl von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß die Summe dieſer Quadratzahl und der Fläche des Dreiecks der zehnte Theil eines Quadrats ſei.

Man bilde dies Dreieck von x und $\frac{1}{x}$, und die Wurzel des geſuchten Quadrats ſei $\frac{1}{x}+5x$, ſo wird die Summe des Quadrats und der Fläche des Dreiecks $=26x^2+10$. Dies multiplicire man mit 10, ſo ſoll $260x^2+100$, folglich auch der vierte Theil dieſes Ausdrucks d. i. $65x^2+25$ ein Quadrat ſein. Ich ſetze die Wurzel deſſelben $=5+8x$, ſo wird

$$65x^2+25=25+80x+64x^2, \text{ alſo } x=80.$$

Hieraus finden wir aber das geſuchte Dreieck, durch das im Vorigen erläuterte Verfahren.

VI. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe der Fläche und der einen Kathete einer gegebenen Zahl gleich wird.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 7; man nehme wieder an, das Dreieck ſei ſeiner Geſtalt nach gegeben, und habe die Seiten $3x$, $4x$, $5x$, ſo erhält man die Gleichung

$$6x^2 + 3x = 7.$$

Wenn man nun den halben Coefficienten von x ins Quadrat erhebt, und dazu das Produkt der Zahl 7 und des Coefficienten von x^2 addirt, ſo müßte die Summe ein Quadrat ſein. Dies trifft aber nicht zu. Man muß alſo zuerſt ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat von der Hälfte der einen Kathete, mit der ſiebenfachen Fläche des Dreiecks zuſammen genommen, ein Quadrat giebt.

Die eine Kathete ſei $= x$, die andere $= 1$, ſo ſoll $3\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, und, wenn man mit 4 multiplicirt, $14x+1$ ein Quadrat ſein. Damit aber das rechtwinklige Dreieck ſich in rationalen Zahlen ausdrücken laſſe, o muß auch

x^2+1 ein Quadrat ſein. Der Unterſchied der beiden Ausdrücke iſt x^2-14x; dieſer Unterſchied hat aber die Factoren x und $x-14$. Den halben Unterſchied dieſer Factoren erhebe ich ins Quadrat, ſo erhalte ich 49, dies ſetze ich dem kleineren Quadrate gleich, ſo wird $x=\frac{24}{7}$. Dieſen Werth ſetze man in die obigen allgemeinen Ausdrücke.

Ich ſetze alſo die eine Kathete $=\frac{24}{7}$, die andere $=1$, und wenn ich dieſe Zahlen zuerſt durch 7, und dann durch x multiplicire, ſo wird die eine Kathete $=24x$, die andere $=7x$, und die Hypotenuſe $=25x$. Wenn man nun zu der Fläche die zweite Kathete addirt, ſo erhält man die Gleichung

$$84x^2+7x=7, \text{ alſo } x=\frac{1}{4}.$$

Die Seiten des geſuchten Dreiecks ſind alſo 6, $\frac{7}{4}$ und $\frac{25}{4}$.

VII. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn man die eine der Katheten davon abzieht.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 7. Nehmen wir an, daß das Dreieck ſeiner Geſtalt nach gegeben ſei, ſo kommt es

zuletzt wieder darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß das Quadrat von der Hälfte der einen Kathete und die ſiebenfache Fläche des Dreiecks zuſammen genommen, ein Quadrat zu ihrer Summe geben. Ein ſolches Dreieck haben wir bereits gefunden, und ſeine Seiten ſind 7, 24, 25. Ich drücke alſo die Seiten des geſuchten Dreiecks durch x und die eben berechneten Coefficienten aus. Wenn man nun von der Fläche des Dreiecks die eine Kathete abzieht, ſo erhält man $84x^2 - 7x$; dies giebt die Gleichung

$$84x^2 - 7x = 7, \text{ und } x = \frac{1}{3}.$$

Dieſen Werth von x ſetze man in die obigen Ausdrücke.

VIII. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben, mit der Summe der Kathete zuſammen genommen, eine vorgeſchriebene Zahl giebt.

Aufloſung.

Die vorgeſchriebene Zahl ſei 6. Man nehme wieder an, das Dreieck ſei ſeiner Geſtalt nach gegeben, ſo kommt es wieder darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit zu finden, daß das Quadrat von

der halben Summe der Katheten, mit der ſechsfachen Flä-che zuſammen genommen, ein Quadrat gebe.

Man ſetze wieder die eine Kathete $= x$, die andere $= 1$, ſo ſoll $\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{4}$, alſo auch das Vierfache dieſes Ausdrucks, d. i. $x^2 + 7x + 1$ ein Quadrat ſein. Aber $x^2 + 1$ muß auch ein Quadrat ſein; der Unterſchied dieſer beiden Ausdrücke iſt $14x$, und dieſer hat die Factoren $2x$ und 7. Der halbe Unterſchied dieſer Faktoren ins Quadrat erhoben, giebt

$$x^2 - 7x + 12\frac{1}{4} = x^2 + 1, \text{ alſo } x = \frac{45}{28}.$$

Das Dreieck hat alſo die Seiten $\frac{45}{28}$, 1, und $\frac{53}{28}$. Nun multiplicire man alles mit 28, ſo werden die Seiten des geſuchten Dreiecks $45x$, $28x$, $53x$. Wenn man nun zu der Fläche dieſes Dreiecks beide Katheten addirt, ſo erhält man $630x^2 + 73x$, und man hat die Gleichung

$$630x^2 + 73x = 6.$$

Hieraus ergiebt ſich für x ein rationaler Werth, den man in die obigen Ausdrücke für die drei Seiten ſetzen kann.

IX. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſ-ſelben

ſelben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn man die Summe der beiden Katheten davon abzieht.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 6. Nehmen wir wieder an, das Dreieck ſei ſeiner Geſtalt nach gegeben, ſo kommt es darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß das Quadrat von der halben Summe der Katheten, mit der ſechsfachen Fläche zuſammen genommen, ein Quadrat gebe. Dieſe Aufgabe haben wir aber ſchon gelöſ't, und das geſuchte Dreieck hat die Seiten 28, 45, 53.

Ich drücke alſo die Seiten des geſuchten Dreiecks durch x und die eben berechneten Coefficienten aus, ſo wird zuletzt

$$630x^2 - 73x = 6.$$

Hieraus findet man $x = \frac{6}{35}$, und dieſen Werth ſetze man in den allgemeinen Ausdruck für die Seiten des geſuchten Dreiecks.

X. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn

man die Hypotenuſe und die eine der Katheten dazu addirt.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 4. Man nehme wieder ein der Geſtalt nach gegebenes Dreieck, ſo kommt es darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß die halbe Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete, ins Quadrat erhoben, und zu der vierfachen Fläche des Dreiecks addirt, ein Quadrat giebt.

Man bilde dies Dreieck von dem Zahlen x und $x+1$, ſo wird das Quadrat von der halben Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete $= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, die vierfache Fläche des Dreiecks aber iſt $= 8x^3 + 12x^2 + 4x$. Man ſoll alſo den Ausdruck $x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 8x + 1$ zu einem Quadrat machen. Man ſetze die Wurzel deſſelben $= x^2 + 6x - 1$, ſo wird $x = \frac{5}{4}$, und das Dreieck wird alſo von den Zahlen $\frac{5}{4}$ und $\frac{9}{4}$, oder wenn man beides mit 4 multiplicirt, von den Zahlen 5 und 9 gebildet. Nun nehme ich ein demſelben ähnliches Dreieck in den kleinſten Zahlen, und ſetze die Seiten des geſuchten Dreiecks $28x$, $45x$, $53x$. Wenn man zu der Fläche dieſes Dreiecks die Hypotenuſe und die eine Kathete addirt, ſo erhält man $630x^2 + 81x$. Dies giebt die Gleichung

$$630x^2 + 81x = 4.$$

Hieraus erhält man $x = \frac{4}{105}$, und dieſen Werth ſetze man in den allgemeinen Ausdruck für die Seiten des Dreiecks.

XI. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn man die Hypotenuſe und die eine Kathete davon abzieht.

Auflöſung.

Die gegebene Zahl ſei 4. Wenn wir hier wieder annehmen, das Dreieck ſei ſeiner Geſtalt nach gegeben, ſo ſind wir wieder genöthigt, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß die vierfache Fläche deſſelben, mit dem Quadrat von der halben Summe der Hypotenuſe und der einen Kathete zuſammen genommen, ein Quadrat wird. Wir haben aber gezeigt, daß ein Dreieck, deſſen Seiten 28, 45, 53 ſind, dieſer Forderung genüge.

Wir drücken alſo die Seiten des geſuchten Dreiecks durch x und die eben berechneten Coefficienten aus, ſo erhält man die Gleichung

$$630x^2 - 81x = 4.$$

Hieraus findet man $x = \frac{1}{6}$, und durch dieſen Werth drücke man nunmehr die Seiten des geſuchten Dreiecks aus.

XII. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß 1) der Unterſchied der Katheten 2) die größere Kathete ſelbſt, und 3) die Fläche des Dreiecks mit der kleineren Kathete zuſammen genommen, ein Quadrat werde.

Auflöſung.

Man bilde ein Dreieck von zwei Zahlen, und nehme an, daß das doppelte Produkt derſelben die größere Kathete ſei. Man muß alſo zwei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſo wohl ihr doppeltes Produkt, als der Ueberſchuß des doppelten Produktes über den Unterſchied ihrer Quadrate ein Quadrat ſei. Dieſe Eigenſchaft haben aber jede zwei Zahlen, wenn die größere das Doppelte der kleineren iſt. Ich bilde alſo ein Dreieck von den Zahlen x und $2x$, ſo ſind die beiden erſten Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Nun wird aber noch verlangt, daß die Fläche des Dreiecks, mit der kleineren Kathete zuſammen genommen, ebenfalls ein Quadrat werde. Es ſoll alſo $6x^4+3x^2$, oder wenn man alles durch x^2 dividirt, $6x^2+3$ ein Quadrat ſein. Wir ſuchen alſo irgend eine Zahl von der Art, daß ihr ſechsfaches Quadrat, wenn man 3 dazu addirt, wieder ein Qua-

drat wird. Dieſe Eigenſchaft hat aber 1, und außerdem unendlich viele andere Zahlen. Man kann alſo das geſuchte Dreieck von den Zahlen 1 und 2 bilden.

XIII. Lehnſatz.

Wenn zwei Zahlen gegeben ſind, deren Summe ein Quadrat iſt, ſo kann man unendlich viele Quadratzahlen von der Beſchaffenheit finden, daß, wenn man ſie mit der einen gegebenen Zahl multiplicirt, und das Produkt zu der anderen gegebenen Zahl addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird.

Es mögen z. B. 3 und 6 die gegebenen Zahlen ſein, und man ſoll eine Quadratzahl von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn man dieſelbe mit 3 multiplicirt, und zu dem Produkte 6 addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird. Das geſuchte Quadrat ſei z. B. x^2+2x+1, ſo ſoll $3x^2+6x+9$ ein Quadrat ſein; dies kann man aber auf unzählige Weiſe erreichen, weil die beſtimmte Zahl 9 ein Quadrat iſt.

Man ſetze alſo die Wurzel $=3-3x$, ſo wird $x=4$, und die Wurzel des geſuchten Quadrats iſt alſo 5. Auf eben dieſe Weiſe aber kann man noch unzählige Quadrate von der verlangten Eigenſchaft finden.

XIV. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben ein Quadrat wird, wenn man jedwede Kathete dazu addirt.

Auflöſung.

Man nehme an, das Dreieck ſei ſeiner Geſtalt nach gegeben, und habe die Seiten $5x$, $12x$ und $13x$, ſo ſoll zuerſt $30x^2 + 12x$ ein Quadrat ſein. Man ſetze alſo

$$30x^2 + 12x = 36x^2, \text{ ſo wird } x = 2.$$

Nun ſollte für eben dieſen Werth von x auch $30x^2 + 5x$ ein Quadrat ſein; aber das trifft nicht zu, und wir müſſen daher ein Quadrat von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn man 30 davon abzieht, mit dem Reſt die Zahl 12 dividirt, das Quadrat des Quotienten mit 30 multiplicirt, und die fünffache Wurzel dazu addirt, wiederum ein Quadrat herauskomme.

Das geſuchte Quadrat ſei $= x^2$; wenn wir davon 30 abziehen, und 12 durch den Reſt dividiren, ſo erhalten wir $\frac{12}{x^2-30}$. Davon iſt das Quadrat $\frac{144}{x^4-60x^2+900}$. Dies multiplicire man mit 30, und addire das Fünffache der Wurzel dazu, ſo erhält man $\frac{60x^2+2520}{x^4-60x^2+900}$. Hier iſt nun der Nenner ein Quadrat, daher muß auch

der Zähler $60x^2 + 2520$ ein Quadrat ſein, d. h. ein gewiſſes Quadrat, mit 60 multiplicirt, und um die Zahl 2520 vermehrt, ſoll wieder ein Quadrat geben.

Wenn wir nun das Dreieck ſo gebildet hätten, daß $60 + 2520$ ein Quadrat wäre, ſo wäre die Aufgabe gelöſ't. Aber 60 entſteht, indem wir die beiden Katheten in einander multipliciren, und 2520 iſt das Produkt aus der größeren Kathete, dem Unterſchied beider Katheten, und der Fläche des Dreiecks. Es kommt alſo darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß das Produkt der beiden Katheten ein Quadrat wird, wenn man das Produkt der größeren Kathete, des Unterſchiedes beider Katheten, und der Fläche des Dreiecks dazu addirt. Wenn wir nun für die größere Kathete irgend eine Quadratzahl nehmen, und die obigen Produkte durch dieſe Zahl dividiren, ſo haben wir nur dahin zu ſehen, daß die kleinere Kathete mit dem Produkt aus der Fläche des Dreiecks und dem Unterſchiede der Katheten wieder ein Quadrat gebe, und dann kommt es darauf an, zu zwei gegebenen Zahlen, nämlich zu der Fläche und der kleineren Kathete, ein Quadrat von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß, wenn man es mit der einen gegebenen Zahlen multiplicirt, und die andere gegebene Zahl dazu addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird. Dieſe Aufgabe aber iſt als Lehnſatz ſchon da geweſen, und das verlangte Dreieck hat die Seiten 3, 4, 5. Ich drücke nun die Seiten des geſuchten Dreiecks durch x und die eben gefundenen Coefficienten aus, ſo ſoll

$6x^2+4x$, und zugleich $6x^2+3x$ ein Quadrat werden. Wenn ich hier die größere Gleichung auflöſe, ſo erhalte ich $x=\frac{4}{x^2-6}$, alſo iſt das Quadrat $\frac{16}{x^4-12x+36}$. Wenn man alſo zu dem ſechsfachen Quadrat noch $3x$ addirt, ſo erhält man $\frac{12x^2+24}{x^4-12x+36}$, daher muß $12x^2+24$ ein Quadrat werden, und es kommt alſo darauf an, ein Quadrat zu finden, welches mit der kleineren gegebenen Zahl multiplicirt, und zu der größeren addirt, wieder ein Quadrat giebt. Ein ſolches Quadrat iſt aber 25; daher iſt $x^2=25$, und $x=5$. Wenn wir alſo $6x^2+4$ zu einem Quadrat machen wollen, ſo ſetzen wir

$$6x^2+4x=25x^2.$$

Hieraus findet man $x=\frac{4}{19}$, und die Seiten des geſuchten Dreiecks ſind $\frac{12}{19}$, $\frac{16}{19}$, $\frac{20}{19}$.

XV. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben ein Quadrat wird, wenn man eine der Katheten davon abzieht.

Auflöſung.

Wenn wir, wie im Vorigen annehmen, daß das Dreieck ſeiner Geſtalt nach gegeben ſei, ſo kommt es wieder dahin, daß wir ein Dreieck ſuchen müſſen, wel-

ches dem Dreieck 3, 4, 5 ähnlich iſt. Man ſetze alſo die Seiten des geſuchten Dreiecks $3x$, $4x$, $5x$, ſo ſoll $6x^2 - 4x$ ein Quadrat ſein. Wenn wir nun dies Quadrat kleiner als $6x^2$ nehmen, ſo wird x ein Bruch, deſſen Zähler 4, und deſſen Nenner der Ueberſchuß der Zahl 6 über den Coefficienten des gewählten Quadrats iſt. Und wenn wir das hier zu wählende Quadrat $= x^2$ ſetzen, ſo muß nicht nur x die eben angegebene Eigengenſchaft haben, ſondern es muß auch $6x^2 - 3x$ ein Quadrat werden. Nimmt man nun x^2 oder das Quadrat von $\frac{4}{6-x^2}$ ſechs Mal, ſo erhält man $\frac{96}{x^4-12x^2+36}$, das Dreifache der Wurzel aber iſt $\frac{12}{6-x^2} = \frac{72-12x^2}{x^4-12x^2+36}$, und wenn wir dieſen Bruch von dem vorigen abziehen, ſo bleibt $\frac{12x^2+24}{x^4-12x+24}$. Hier iſt nun der Nenner ein Quadrat, daher muß man auch den Zähler $12x^2+24$ zu einem Quadrate machen, und dies geſchieht, wenn $x = 1$ iſt. Ich ſetze daher

$$6x^2 - 4x = x^2,$$

ſo wird $x = \frac{4}{5}$, und die Seiten des geſuchten Dreiecks ſind $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$, und 4.

Will man aber für x^2 nicht die Zahl 1 gebrauchen, ſo nehme man $x+1$ als die Wurzel des geſuchten Quadrats an. Wenn man nun zu dem Dreifachen des Quadrats noch 6 addirt, ſo erhält man $3x^2+6x+9$, und dies ſoll ein Quadrat werden. Dies iſt aber ganz

leicht, und man findet, daß x nicht größer als $\frac{13}{9}$, aber die Wurzel des geſuchten Quadrats d. i. x+1 nicht größer als $\frac{22}{9}$ ſein kann. Wenn man das ſo erhaltene Quadrat von der Zahl 6 abzieht, ſo erhält man für x ebenfalls einen rationalen Werth.

XVI. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben ein Quadrat wird, ſo wohl wenn man die Hypotenuſe, als wenn man die eine Kathete davon abzieht.

Auflöſung.

Das Dreieck ſei ſeiner Geſtalt nach gegeben, und habe die Seiten $3x$, $4x$ und $5x$; nun ſoll man alſo wieder $6x^2 - 5x$, und $6x^2 - 3x$ zu einem Quadrat machen. Wenn ich nun $6x^2 - 3x$ zu einem Quadrat mache, ſo wird $x = \frac{3}{6-x^2}$, und wenn man x auf dieſe Weiſe gefunden hat, ſo wird $6x^2 = \frac{54}{x^4 - 12x^2 + 36}$, und $5x = \frac{15}{6-x^2} = \frac{90 - 15x^2}{x^4 - 12x^2 + 36}$, und wenn ich den letzteren Bruch von dem erſteren abziehe, ſo ſoll der Reſt $\frac{15x^2 - 36}{x^4 - 12x^2 + 36}$ auch ein Quadrat ſein. Der Nen-

ner iſt ſchon ein Quadrat, daher muß man auch $15x^2-36$ zu einem Quadrat machen. Aber das iſt unmöglich, weil 15 nicht aus zwei Quadraten beſteht. Darum aber iſt die urſprüngliche Aufgabe noch nicht unmöglich, ſondern man muß nur das zum Grunde gelegte Dreieck näher beſtimmen.

Die $15x^2$ ſind dadurch entſtanden, daß wir ein anderes Quadrat, das aber kleiner war, als die Fläche des Dreiecks, mit dem Produkt der Hypotenuſe und der einen Kathete multiplicirt haben. Aber die Zahl -36 iſt das Produkt aus der Fläche, der einen Kathete, und dem Unterſchied der Hypotenuſe und eben dieſer Kathete. Es kommt alſo darauf an, daß wir zuerſt ein rechtwinkliges Dreieck und ein Quadrat ſuchen, welches kleiner als die Fläche des Dreiecks iſt, übrigens aber die Beſchaffenheit hat, daß, wenn man das Quadrat mit dem Produkt aus der Hypotenuſe und der einen Kathete multiplicirt, und das Produkt aus der Fläche, der einen Kathete, und dem Unterſchied der Hypotenuſe und dieſer Kathete abzieht, der Reſt alsdann ein Quadrat wird. * — — — — — — — aus dem doppelten Produkt derſelben entſtanden ſei, und alles durch das Produkt der Hypotenuſe und der genannten Kathete dividiren, ſo finden wir das geſuchte Quadrat, wenn wir die Hälfte der Kathete mit dem Unterſchied der Hypotenuſe und der Kathete multipliciren. *

Wenn wir alſo annehmen, daß die Zahlen, von welchen das Dreieck gebildet wird, ähnliche Flächenzah-

len ſind, ſo werden wir dadurch die Aufgabe löſen. Man bilde alſo das Dreieck von den Zahlen 4 und 1; das Quadrat aber, damit es kleiner ſei als die Fläche des Dreiecks, ſei 36. Nun bilde ich das Dreieck, und nehme $8x$, $15x$, $17x$ als die Seiten deſſelben an; wenn ich nun von der Fläche dieſes Dreiecks die kleinere Kathete abziehe, ſo bleibt $60x^2 - 8x$. Nun ſetze ich

$$60x^2 - 8x = 36x^2, \text{ ſo wird } x = \frac{1}{3}.$$

Das geſuchte Dreieck hat alſo die Seiten $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{17}{3}$.

XVII. Lehnſatz.

Wenn man von zwei gegebenen Zahlen die eine mit einem Quadrat multiplicirt, die andere aber von dem Produkte abzieht, und der Reſt alsdann ein Quadrat wird, ſo läßt ſich auch noch eine andere und größere Quadratzahl finden, welche das Nämliche leiſtet.

Es ſind z. B. die Zahlen 3 und 11 und das Quadrat der Zahl 5 gegeben; wenn ich dies Quadrat mit der Zahl 3 multiplicire, und von dem Produkt die Zahl 11 ſubtrahire, ſo erhalte ich das Quadrat der Zahl 8; nun ſoll man ein anderes Quadrat finden, welches größer als 25 iſt, und noch das Nämliche leiſtet.

Man ſetze die Wurzel des geſuchten Quadrats $=x+5$, ſo iſt das Quadrat ſelbſt $x^2+10x+25$. Wenn man dies mit 3 multiplicirt, und 11 davon abzieht, ſo hat man $3x^2+30x+64$, und dies ſoll ein Quadrat ſein. Man ſetze die Wurzel deſſelben $=8-2x$, ſo wird

$$3x^2+30x+64=64-32x+4x^2, \text{ und } x=62.$$

Die Wurzel des geſuchten Quadrats iſt alſo 67, und das Quadrat ſelbſt 4489, und dieſes Quadrat leiſtet, was verlangt wird.

XVIII. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Fläche deſſelben ein Quadrat wird, man mag die Hypotenuſe oder die eine der Katheten dazu addiren.

Auflöſung.

Wenn wir annehmen, das Dreieck ſei ſeiner Geſtalt nach gegeben, ſo kommt es wieder dahin, daß wir die Verhältniſſe der Seiten näher beſtimmen, und hierauf ein Dreieck und ein Quadrat ſuchen müſſen, welches größer als die Fläche des Dreiecks, übrigens aber ſo beſchaffen iſt, daß, wenn man das Quadrat mit dem Produkt der Hypotenuſe und der einen Kathete multiplicirt, und hierauf das Produkt aus der Fläche des Dreiecks, der einen Kathete, und dem Unterſchied zwiſchen der

Hypotenuſe und der genannten Kathete davon abzieht, der Reſt wieder ein Quadrat wird.

Man bilde alſo das Dreieck von den Zahlen 4 und 1, und das Quadrat ſei 36; aber dies Quadrat iſt nicht grȍßer als die Fläche des Dreiecks. Wir haben nun zwei Zahlen, nämlich das Produkt der Hypotenuſe in die eine Kathete, $=136$; und das Produkt aus der Fläche, der einen Kathete, und dem Unterſchied der Hypotenuſe und eben dieſer Kathete, $=4320$. Wenn wir nun ein gewiſſes Quadrat, nämlich 36, mit 136 multipliciren, und von dem Produkte 4320 abziehen, ſo erhalten wir wieder ein Quadrat; wir ſuchen aber ein Quadrat, welches eben dieſe Eigenſchaft hat, jedoch grȍßer als 36 iſt. Wir ſetzen dies Quadrat $=x^2+12x+36$, und wenn wir nun ganz das Verfahren in der vorigen Aufgabe beibehalten, ſo werden wir unzählige Quadrate finden, welche dieſer Bedingung genügen; eines dieſer Quadrate aber wird 676 ſein.

Ich nehme alſo an, das Dreieck habe die Seiten $8x$, $15x$, $17x$, ſo wird

$$60x^2+8x=676x^2 \text{ und } x=\frac{1}{77}.$$

XIX. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn man die ſpitzen Winkel deſſelben hälftet, die hälftende Linie ſich durch eine Rational-Zahl ausdrücken läßt.

Auflöſung.

Man ſetze die den Winkel hälftende Linie $= 5x$, den einen Abſchnitt der Grundlinie aber $= 3x$, ſo wird die eine Kathete $= 4x$ ſein. Man nehme aber für die Grundlinie irgend eine beſtimmte, durch 3 theilbare Zahl an, z. B. 3, daher wird der zweite Abſchnitt der Grundlinie $= 3 - 3x$ ſein. Da nun der Winkel gehälftet iſt, die Kathete aber ſich zu dem einen Abſchnitt der Grundlinie wie $4:3$ verhält, ſo wird auch die Hypotenuſe ſich zu dem anderen Abſchnitt der Grundlinie wie $4:3$ verhalten, und da wir den zweiten Abſchnitt der Grundlinie $= 3 - 3x$ geſetzt haben, ſo wird die Hypotenuſe $= 4 - 4x$ ſein. Nun iſt nur noch erforderlich, daß man das Quadrat der Hypotenuſe oder $16x^2 - 32x + 16$ dem Quadrat der beiden Katheten $16x^2 + 9$ gleich ſetze. Aus der Gleichung

$$16x^2 - 32x + 16 = 16x^2 + 9$$

ergiebt ſich, $x = \frac{7}{32}$, und das Uebrige iſt für ſich ſelbſt klar. Wenn ich aber alles mit 32 multiplicire, ſo wird das Loth 28, die Grundlinie 96, die Hypotenuſe 100, und die den Winkel hälftende Linie 35.

XX. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe der

Fläche und der Hypotenuſe eine Quadratzahl, der Umfang aber eine Kubikzahl wird.

Auflöſung.

Man ſetze die Fläche des Dreiecks $= x$, für die Hypotenuſe aber ſetze man irgend eine beſtimmte Quadratzahl weniger x, z. B. $16 - x$. Wenn nun x die Fläche des Dreiecks iſt, ſo iſt das Produkt der beiden Katheten $= 2x$, und dies hat die Faktoren x und 2. Wenn ich nun die eine Kathete $= 2$ ſetze, ſo iſt die andere $= x$, und der Umfang des Dreiecks iſt $= 18$, alſo keine Kubikzahl.

Aber 18 iſt die Summe eines Quadrats und der Zahl 2; ich muß alſo ein Quadrat ſuchen, welches, um die Zahl 2 vergrößert, eine Kubikzahl wird, ſo daß alſo die Kubikzahl um 2 größer ſein muß, als die Quadratzahl. Man ſetze die Wurzel des Quadrats $= x + 1$, und die Wurzel des Cubus $= x - 1$, ſo iſt die Quadratzahl $= x^2 + 2x + 1$, und die Kubikzahl $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Nun ſoll die Kubikzahl um 2 größer ſein, als die Quadratzahl. Ich addire alſo zu der Quadratzahl 2, ſo iſt

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3.$$

Hieraus findet man $x = 4$; alſo iſt die Wurzel des Quadrats $= 5$, die Wurzel des Cubus $= 3$, das Quadrat ſelbſt aber iſt 25, und der Cubus 27.

Nun mache ich den Anſatz für das rechtwinklige Dreieck anders; ich ſetze nämlich die Fläche deſſelben, wie

wie vorher, = x, die Hypotenuſe = 25—x, die Grundlinie aber bleibt = 2, und das Loth = x. Jetzt iſt nur noch erforderlich, daß man das Quadrat der Hypotenuſe den Quadraten beider Kathete zuſammen genommen gleich ſetze, daher wird

$$x^2 - 50x + 625 = x^2 + 4.$$

Hieraus erhält man $x = \frac{621}{50}$, und wenn man dieſen Werth in die allgemeinen Ausdrücke ſetzt, ſo werden die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

XXI. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe der Fläche und der Hypotenuſe eine Kubikzahl, der Umfang deſſelben aber eine Quadratzahl wird.

Auflöſung.

Wenn wir, eben ſo wie in der vorigen Aufgabe, die Fläche des Dreiecks = x ſetzen, für die Hypotenuſe aber irgend eine Kubikzahl weniger x annehmen, ſo kommt es zuletzt dahin, daß wir eine Kubikzahl ſuchen müſſen, welche, um 2 vermehrt, ein Quadrat wird.

Man ſetze die Wurzel der Kubikzahl = x — 1, ſo wird der Cubus, wenn man noch 2 dazu addirt, $= x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, und dieſer Ausdruck ſoll ein Quadrat ſein. Man ſetze die Wurzel $= \frac{3}{2}x + 1$, ſo wird

$x = \frac{21}{4}$. Die Wurzel des Cubus iſt alſo $\frac{17}{4}$, und der Cubus ſelbſt $\frac{4913}{64}$.

Nun ſetze ich die Fläche $= x$, die Hypotenuſe $= \frac{4913}{64}x$, die Grundlinie war 2, das Loth $= x$, und wenn wir jetzt das Quadrat der Hypotenuſe und die Quadrate der beiden Katheten gleich ſetzen, ſo erhalten wir für x einen rationalen Werth.

XXII. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe der Fläche und der einen Kathete eine Quadratzahl, der Umfang aber eine Kubikzahl ſei.

Auflöſung.

Man nehme an, das Dreieck werde von einer unbeſtimmten Zahl und von der um 1 größeren, z. B. von x und $x+1$ gebildet, ſo iſt das Loth $=2x+1$, die Grundlinie $=2x^2+2x$, die Hypotenuſe $=2x^2+2x+1$. Nun ſoll der Umfang dieſes Dreiecks eine Kubikzahl, und die Summe ſeiner Fläche und der einen Kathete eine Quadratzahl ſein. Der Umfang wird aber $=4x^2+6x+2$. Dieſe Zahl iſt nun zuſammengeſetzt, denn ſie iſt das Produkt der Faktoren $4x+2$ und $x+1$. Wenn wir

alſo jede Seite durch $x+1$ dividiren, ſo wird der Umfang $=4x+2$, und das ſoll eine Kubikzahl ſein.

Ferner ſoll die Summe der Fläche und der einen Kathete ein Quadrat ſein. Die Fläche wird aber $=\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+2x+1}$, und die eine Kathete $=\frac{2x+1}{x+1}$. Wenn man dieſe beiden Ausdrücke auf gleiche Nenner bringt, ſo wird die Summe beider $=\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$, und wenn wir mit dem Nenner wirklich dividiren, ſo erhalten wir $2x+1$, ſo daß alſo die Summe, die wir zu einem Quadrat machen ſollen, $=2x+1$ wird.

Nun ſollten wir aber auch $4x+2$ zu einem Cubus machen; es kommt alſo darauf an, eine Kubikzahl zu finden, die das Doppelte einer Quadratzahl iſt. Solche Zahlen aber ſind 8 und 4; ich ſetze daher

$$4x+2=8, \text{ ſo wird } x=1\frac{1}{2}.$$

Das geſuchte rechtwinklige Dreieck hat alſo die Seiten $\frac{8}{5}, \frac{15}{5}, \frac{17}{5}$.

XXIII. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe ſeiner Fläche und der einen Kathete eine Kubikzahl, der Umfang aber eine Quadratzahl ſei.

Wenn wir wieder den nämlichen Gang, wie in der vorigen Aufgabe, nehmen, ſo kommt es zuletzt dahin, daß wir $4x+2$ zu einem Quadrat, und $2x+1$ zu einem Cubus machen müſſen. Man muß alſo eine Quadratzahl ſuchen, welche das Doppelte einer Kubikzahl iſt. Solche Zahlen ſind aber 16 und 8. Wir ſetzen daher

$$4x+2=16, \text{ ſo wird } x=3\frac{1}{2}.$$

Die Seiten des geſuchten Dreiecks ſind alſo $\frac{16}{9}, \frac{63}{9}, \frac{65}{9}$.

XXIV. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Umfang eine Quadratzahl, die Summe des Umfangs und der Fläche aber eine Kubikzahl wird.

Auflöſung.

Man bilde ein rechtwinkliges Dreieck von den Zahlen x und 1, ſo wird die eine Kathete $=2x$, die andere $=x^2-1$, die Hypotenuſe aber $=x^2+1$, und man ſoll $2x^2+2x$ zu einem Quadrat, x^3+2x^2+x aber zu einem Cubus machen. Nun iſt es ganz leicht, $2x^2+2x$ zu einem Quadrat zu machen, und man findet den erforderlichen Werth von x, wenn man 2 durch ein um 2 vermindertes Quadrat dividirt. Aber die für x gefundene Zahl muß ſo beſchaffen ſein, daß, wenn man ihren Cubus, ihr doppeltes Quadrat und

die Zahl ſelbſt zuſammen addirt, die Summe eine Kubikzahl wird. Nun war nach dem Vorigen $x = \frac{2}{x^2-2}$; der Cubus wird alſo $= \frac{8}{(x^2-2)^3}$, das doppelte Quadrat $= \frac{8}{(x^2-2)^2}$, die Zahl ſelbſt aber iſt $= \frac{2}{x^2-2}$, und wenn ich alles auf gleichen Nenner bringe, ſo kommt $\frac{2x^4}{(x^2-2)^3}$. Der Nenner iſt alſo eine Kubikzahl, daher muß man nur noch den Zähler $2x^4$, oder wenn man durch x^3 dividirt, $2x$ zu einer Kubikzahl machen. Wenn wir alſo $2x$ irgend einer beſtimmten Kubikzahl gleich ſetzen, ſo wird x die Hälfte dieſer Kubikzahl. Man ſetze $2x = 8$, ſo wird $x = 4$, und davon iſt das Quadrat $= 16$.

Ich ſetze alſo das geſuchte Quadrat $= 16x^2$, ſo wird

$$2x^2 + 2x = 16x^2.$$

Hieraus findet man $x = \frac{1}{7}$, $x^2 = \frac{1}{49}$, und davon ſoll man 1 abziehen, weil die eine Kathete $= x^2 - 1$ iſt. Es kommt alſo darauf an, einen Cubus von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß der vierte Theil ſeines Quadrats größer als 2, aber kleiner als 4 ſei. Wenn wir dieſen Cubus durch x^3 bezeichnen, ſo ſoll $\frac{1}{4}x^6$ größer als 2 und kleiner als 4, alſo x^6 größer als 8 und kleiner als 16 ſein. Eine Kubokubikzahl dieſer Art iſt $\frac{729}{64}$, folglich der Cubus $\frac{27}{8}$. Ich ſetze alſo $2x = \frac{27}{8}$, ſo wird $x = \frac{27}{16}$, und $x^2 = \frac{729}{256}$, und wenn wir nun 2

durch $x^2 - 2$ dividiren, ſo finden wir $x = \frac{512}{217}$, und von dem Quadrat dieſer Zahl läßt die Zahl 1 ſich abziehen.

XXV. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Umfang eine Kubikzahl, die Summe des Umfangs und der Fläche aber eine Quadratzahl ſei.

Auflöſung.

Zuerſt muß man hier folgende Aufgabe löſen: es ſind zwei Zahlen gegeben, und man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Umfang deſſelben der einen, und die Fläche deſſelben der anderen gegebenen Zahl gleich werde.

Die gegebenen Zahlen mögen 12 und 7 ſein, und es werde verlangt, daß der Umfang des geſuchten Dreiecks $= 12$, ſeine Fläche $= 7$ werde. In dieſem Dreieck iſt das Produkt der beiden Katheten $= 14$; wenn wir alſo die eine Kathete $= \frac{1}{x}$ ſetzen, ſo wird die andere $= 14x$ ſein. Der Umfang iſt aber $= 12$, daher muß die Hypotenuſe $= 12 - 14x - \frac{1}{x}$ ſein. Nun

iſt noch übrig, daß man das Quadrat der Hypotenuſe den Quadraten der beiden Katheten gleich ſetze, d. h.

$$\frac{1}{x^2} + 196x^2 - 336x - \frac{24}{x} + 172 = 196x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, ziehe Gleiches von Gleichem ab, und multiplicire alles mit x, ſo erhält man

$$336x^2 + 24 = 172x.$$

Dieſe Gleichung aber läßt ſich nicht auflöſen, wenn nicht das Quadrat des halben Coefficienten von x, nachdem man das Produkt der 24 Einheiten und des Coefficienten von x^2 davon abgezogen hat, ein Quadrat wird. Nun iſt 172 aus dem Quadrat des Umfangs und der vierfachen Fläche des Dreiecks entſtanden, das Produkt der 24 Einheiten in den Coefficienten von x^2 iſt ein Produkt aus dem achtfachen Quadrat des Umfangs in die Fläche des Dreiecks. Wenn nun die gegebenen Zahlen, 12 und 7, ſo beſchaffen wären, wie es nach der angeſtellten Betrachtung erforderlich iſt, ſo könnte man die Aufgabe löſen.

Man ſetze die Fläche des Dreiecks = x, für den Umfang aber nehme man eine Zahl, welche zu gleicher Zeit eine Kubikzahl und eine Quadratzahl iſt, nämlich 64, und um nun das Dreieck zu beſtimmen, muß man die halbe Summe von dem Quadrat der Zahl 64 und von 4x ins Quadrat erheben, davon das achtfache Produkt des Umfangs und der Zahl x abziehen, und den Reſt zu einem Quadrat machen. Durch dieſe Rechnung

erhält man aber $4x^2 - 24576x + 4194304$; davon iſt der vierte Theil $= x^2 - 6144x + 1048576$, und dieſen Ausdruck muß man zu einem Quadrat machen. Aber $x + 64$ ſoll ebenfalls ein Quadrat ſein; man mache daher in beiden Ausdrücken die beſtimmten Zahlen (64 und 1048576) einander gleich, nehme dann den Unterſchied der beiden Formeln, zerfälle dieſen in Faktoren, und das Uebrige iſt dann für ſich klar.

XXVI. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Quadrat der Hypotenuſe die Summe eines andern Quadrats und ſeiner Wurzel, durch eine der Katheten aber dividirt, die Summe einer Kubikzahl und ihrer Wurzel ſei.

Auflöſung.

Man ſetze die eine Kathete $= x$, die andere $= x^2$, ſo iſt das Quadrat der Hypotenuſe die Summe eines Quadrats und ſeiner Wurzel, und wenn man es durch eine der Katheten oder durch x dividirt, ſo iſt es die Summe einer Kubikzahl und ihrer Wurzel. Es iſt alſo nur das Eine übrig, daß $x^4 + x^2$, oder, wenn man alles durch x^2 dividirt, daß $x^2 + 1$ ein Quadrat ſei. Man ſetze die Wurzel $= x - 2$, ſo wird

$$x^2 + 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ alſo } x = \frac{3}{4}.$$

Das Uebrige iſt für ſich ſelbſt klar.

XXVII. Aufgabe.

Man ſoll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die eine Kathete eine Kubikzahl, die zweite der Unterſchied einer Kubikzahl und ihrer Wurzel, die Hypotenuſe endlich die Summe einer Kubikzahl und ihrer Wurzel ſei.

Auflöſung.

Man ſetze die Hypotenuſe $= x^3 + x$, die eine Kathete $= x^3 - x$, ſo wird die andere Kathete $= 2x^2$ ſein. Es iſt alſo nur noch erforderlich, daß man $2x^2$ zu einem Cubus mache. Man ſetze

$$2x^2 = x^3, \text{ ſo wird } x = 2.$$

Das Dreieck wird alſo die Seiten 6, 8, 10 haben.

Diophantus

von Alexandria

über die Polygonzahlen.

Digitized by Google

Erſter Satz.

Jede der mit Eins zunehmenden Zahlen, von der Drei ab, iſt eine Polygonzahl, die erſte von der Eins angerechnet, und hat ſo viel Ecken als Einheiten.

Ihre Seite iſt die der Eins nächſte Zahl, die Zwei. Die Drei iſt ein Dreieck, die Vier ein Viereck, die Fünf ein Fünfeck und ſo fort.

Wie aber bekanntlich die Quadratzahlen aus der Vervielfältigung einer Zahl durch ſich ſelbſt entſtehen, ſo wird gezeigt, daß jede Polygonzahl, vervielfältigt durch eine Zahl nach dem Verhältniß ihrer Ecken, und zugeſetzt zu einer mit der Anzahl der Ecken im Verhältniß ſtehenden Quadratzahl, eine Quadratzahl werde.

Dies wollen wir beweiſen und zeigen, wie aus gegebner Seite die dazu gehörige Polygonzahl, und wie aus dieſer jene gefunden werde.

Zuerſt aber wollen wir die dahin führenden Vorausſetzungen erweiſen.

Zweiter Satz.

E . . . . . A . . . . B . . D . . . G

Wenn drei Zahlen von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt das achtfache Produkt der größten und mittlern, zugeſetzt zu dem Quadrat der kleinſten, eine Quadratzahl, deren Seite gleich iſt der Summe der größten und doppelten mittlern.

Beweis.

Drei Zahlen AB, BG, BD ſein von gleichem Unterſchiede. Zu zeigen, daß achtmal das Produkt von AB in BG, zugezählt zu dem Quadrat von BD eine Quadratzahl mache, deren Seite gleich ſei der Summe von AB und zweimal BG.

Da AB gleich iſt dem BG zugeſetzt zu DG, ſo zerlegt ſich das achtfache Produkt von AB in BG, in das achtfache Quadrat von BG und in das achtfache Produkt von DG in BG; ferner zerfällt jeder dieſer Ausdrücke in zwei Hälften, die Hälfte des erſten iſt das vierfache Produkt von AB in BG, die Hälfte des zweiten iſt das vierfache Quadrat von BG, zugeſetzt zu dem vierfachen Produkt von DG in BG. Das Vierfache von DG in BG mit dem Quadrat von BD iſt gleich

dem Quadrat von AB *). Suchen wir alſo, wie das Quadrat von AB und das vierfache Produkt von AB in BG, zugeſetzt zu dem vierfachen Quadrat von BG, eine Quadratzahl gebe?

Setzen wir nun AE gleich dem BG, ſo vertauſchen wir das vierfache Produkt von AB in BG gegen das vierfache von AB in AE. Dies, zugeſetzt zu dem vierfachen Quadrat von BG (das iſt von AE) giebt das vierfache Produkt von AE in EB. Hiezu das Quadrat von AB geſetzt, ſo ergiebt ſich die Summe, gleich dem Quadrat von BE und EA als einer einzigen Linie **). BE und EA ſind aber gleich AB und dem doppelten AE, d. i. dem doppelten BG, welches zu zeigen war.

Dritter Satz.

B. A.. G.. D.. E

Wenn ſo viel Zahlen, als man will, von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt der Unterſchied der größten und kleinſten gleich dem zweier nächſten, vervielfacht durch die um Eins verkleinerte Anzahl aller gegebnen.

Beweis.

Es ſein die Zahlen BA, BG, BD, BE, ſo viel man deren will, von gleichem Unterſchiede. Zu zeigen, daß

*) Euklid. II. 8.

**) Euklid. II. 8.

der Unterſchied von BE und BA das Vielfache iſt des Unterſchiedes DE durch die um Eins verkleinerte Anzahl von BA, BG, BD, BE.

Da BA, BG, BD, BE von gleichem Unterſchiede ſind, ſo ſind AG, GD, DE einander gleich. AE iſt alſo das Vielfache von AG durch die Anzahl von AG, GD, DE. Dieſe Anzahl aber iſt um Eins kleiner als die von BA, BG, BD, BE. Alſo iſt AE das Vielfache von AG durch die um Eins verkleinerte Anzahl von BA, BG, BD, BE.

AE iſt der Unterſchied der größten und kleinſten, AG der Unterſchied zweier nächſten.

Vierter Satz.

Wenn ſo viel Zahlen, als man will, von gleichem Unterſchiede ſind, ſo machen die größte und kleinſte zuſammen, vervielfacht durch die Anzahl der gegebenen, die doppelte Summe der gegebnen.

Beweis.

A. B. C. D. E. F. G

H. L. M. K... G

Es ſein die Zahlen, ſo viel als man will, AB, AC, AD, AE, AF, AG, von gleichem Unterſchiede. Zu zeigen, daß die Summe von AB und AG, vervielfacht durch die Anzahl der gegebenen, eine Zahl mache, welche gleich ſei der doppelten Summe dieſer gegebenen.

Ihre

Ihre Anzahl iſt entweder paar, oder unpaar.

Sie ſei zuerſt paar, und ſo viel ihrer ſind, ſo viel Einheiten enthalte HG. Alſo wird HG eine Paarzahl ſein. Man halbtheile ſie bei K, und zerlege HK in die Einheiten bei L, M. Da nun AG über AE um ſo viel Einheiten überſchießt, als AD über AB, ſo wird die Summe von AG und AB gleich der von AE und AD. Die Summe von AG und AB iſt gleich dem Produkte derſelben in die Einheit HL. So wird auch die Summe von AE und AD gleich ſein dem Produkte der Summe von AG und AB in die Einheit LM. Aus den nämlichen Gründen iſt auch die Summe von AF und AC gleich dem Produkt der Summe von AG und AB in die Einheit MK. So wird alſo die Summe von AG, AB, AE, AD, AF, AC gleich ſein dem Produkt der Summe von AG und AB in HK. Das Doppelte dieſes Produkts iſt das der Summe von AG und AB in HG. So iſt alſo die doppelte Summe von AB, AC, AD, AE, AF, AG das Produkt von AG und AB in HG, das iſt, in die Anzahl der gegebenen; welches zu zeigen war.

Fünfter Satz.

A. B. C. D. E. F

G. M. L. K . . H

Unter eben dieſen Annahmen ſei die Anzahl von AB, AC, AD, AE, AF unpaar, und GH enthalte ſo viel Einheiten, als Zahlen gegeben ſind. Unpaar iſt

alſo auch GH. Man nehme alſo in ihr die Einheit GM, halbtheile MH bei K und zerlege MK bei L in ihre Einheiten. Wenn nun AF von AD um gleichviel unterſchieden iſt, als AD von AB, ſo iſt die Summe von AF und AB das Doppelte von AD, das iſt, des Produkts von AD in LK. Eben ſo iſt die Summe von AE und AC das Doppelte des Produkts von AD in ML. So iſt alſo die Summe von AF, AB, AE, AC das Doppelte von AD in MK. Hievon das Doppelte iſt MH. So iſt mithin die Summe von AF, AB, AE, AC gleich dem Produkte von AD in MH. AD iſt aber auch gleich dem Produkte von AD in GM. Die Summe von AB, AC, AD, AE, AF, iſt alſo gleich dem Produkte von AD in GH. Das Produkt der Summe von AF, AB in GH iſt aber doppelt das von AD in GH. Folglich iſt auch die Summe der gegebenen Zahlen doppelt genommen gleich dem Produkte der Summe von AF, AB in GH, d. i., in die Anzahl der gegebnen; welches zu zeigen war.

Sechster Satz.

Wenn von der Einheit ab, ſo viel Zahlen als man will, von gleichem Unterſchiede ſind, ſo giebt die Summe, vervielfältigt durch das achtfache des Unterſchiedes zweier nächſten, und zugezählt zu dem Quadrate dieſes um zwei Einheiten verkleinerten Unterſchiedes, ein Quadrat, deſſen

um Zwei verkürzte Seite ſein wird das Produkt des Unterſchiedes zweier nächſten in eine Zahl, welche, Eins hinzugezählt, das Doppelte iſt der Anzahl aller gegebnen, die Einheit mitgerechnet.

Beweis.

A . K . . N . . . BG . . . . DE . L . . . . Z

H . M — X — T

Von der Einheit ab ſetze man die Zahlen AB, GD, EZ. Ich ſage, das angegebne werde erfolgen.

Denn es enthalte HT ſo viel Einheiten, als Zahlen, die Einheit mitgerechnet, gegeben ſind. Und da der Unterſchied der Zahl EZ von der Einheit ein Produkt iſt des Unterſchiedes der Zahl AB von der Einheit in eine um die Einheit kleinere Zahl als HT *), ſo ſetzen wir die Einheiten AK, EL, HM und erhalten LZ, als ein Produkt von KB in MT. Wir ſetzen die Zwei KN, und es fragt ſich nun: ob die Summe der gegebnen, vervielfältigt durch acht KB (den Unterſchied zweier nächſten), und zugezählt zu dem Quadrate von NB, ein Quadrat gebe, deſſen Seite, um Zwei verkürzt, das Produkt iſt des Unterſchiedes KB in die Summe von HT, TM?

Da nun die Summe gleich iſt dem halben Produkt der Summe EZ, EL in HT **), dies aber ſich zerlegt

*) Diophantus III.

**) Diophantus IV.

in das Produkt von LZ in HT und das von dem doppelten EL in HT (das iſt, das doppelte HT), ſo iſt wieder die Summe gleich dem halben Produkt von LZ in HT, und dem einfachen HT.

Es iſt aber gezeigt, daß LZ gleich iſt dem Produkt von KB in MT *). Alſo iſt die Summe gleich der halben körperlichen Zahl KB in MT in HT und dem einfachen HT. Wenn wir daher MT halbtheilen bei X, ſo erhalten wir die Summe gleich der körperlichen Zahl von KB in MX in HT und dem einfachen HT. Nun iſt die Frage: ob dies beides, vervielfältigt durch acht KB und zugezählt zu dem Quadrate von NB, ein Quadrat gebe?

Es giebt aber die körperliche Zahl von KB in MX in HT, vervielfältigt durch KB ein Produkt von MX in HT in das Quadrat von KB. Alſo giebt die körperliche Zahl von KB in MX in HT, vervielfältigt durch acht KB, ein Produkt von MX in HT in acht Quadrate von KB, oder ein achtfaches Produkt von MX in HT in das Quadrat von KB, oder ein vierfaches Produkt von MT in HT in das Quadrat von KB. Die Frage iſt alſo: ob dies vierfache Produkt zugezählt zu dem Produkt von HT in acht KB und dem Quadrate von NB ein Quadrat gebe?

Das vierfache Produkt von HM in KB iſt gleich dem doppelten von KN in KB, welches, zugezählt zu

*) Diophantus III.

dem Quadrate von NB, die Summe der Quadrate von KB und KN giebt *). Alſo fragt ſich weiter:

A. K.. N... BG.......... DE. L..............Z

H. M — X — T

ob das vierfache Produkt von MT in TH in das Quadrat von KB, zugezählt zu den Quadraten von KB und KN und dem vierfachen Produkt der Summe von HT und TM in KB, ein Quadrat gebe?

Das Quadrat von KB geht über in das Produkt dieſes Quadrats in das von HM. Dies Produkt zugezählt zu dem vierfachen Produkt von MT in TH in das Quadrat von KB macht das Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM in das Quadrat von KB. Nun iſt alſo die Frage: ob auch das Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM in das Quadrat von KB zugezählt zu dem Quadrat von KN und dem vierfachen Produkt der Summe von HT und TM in KB eine Quadratzahl gebe?

A. K.. N... B — R

Setzen wir aber die Zahl NR gleich dem Produkt der Summe von HT und TM in KB, ſo wird auch das Quadrat von NR gleich dem Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM in das Quadrat von KB, wie im nächſten Satze gezeigt werden ſoll.

Die Frage iſt: ob das Quadrat von NR, zugezählt zu dem Quadrat von KN und dem vierfachen Produkt

*) Euklid. II. 4.

der Summe von HT und TM in KB eine Quadratzahl gebe?

Das vierfache Produkt aber der Summe von HT und TM in KB iſt gleich dem vierfachen NR, weil NR dem einfachen Produkt der Summe von HT und TM in KB gleich geſetzt iſt. Vier NR ſind gleich dem doppelten Produkt von KN in NR — weil KN als Zwei geſetzt iſt. — Die Frage iſt alſo: ob die Summe der Quadrate von NR und KN und das doppelte Produkt von KN in NR eine Quadratzahl mache?

Sie machen aber das Quadrat von KR *), deſſen Seite KR, um Zwei, nämlich KN, verkürzt, die Zahl NR macht, welche ein Produkt iſt des Unterſchiedes KB in die Summe HT und TM, die, Eins hinzugezählt, das Doppelte der vorgelegten Zahlenreihe iſt.

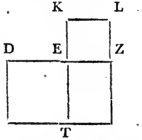
Siebenter Satz.

A ſei gleich der Summe von HT und TM, B gleich KB, C dem Produkt der Summe von HT und TM in KB.

Ich ſage, daß auch das Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM, das iſt, des Quadrats von A, in das Quadrat von KB, das iſt das von B, gleich iſt dem Quadrat von C.

*) Euklid. II. 4.

Beweis.



Man ziehe den Zahlen A, B, gleiche Linien DE, EZ, beſchreibe über ihnen die Quadrate A, B, das iſt DT, EL, und vollende das Complement TZ.

Wie alſo DE zu EZ ſich verhält, ſo DT zu TZ; wie DE zu EK, ſo TZ zu EL *). Alſo iſt TZ die mittlere Proportionale zwiſchen den Quadraten DT, EL. Das Produkt dieſer beiden Quadrate in einander iſt alſo gleich dem Quadrate des Complements TZ **). Nun iſt DT gleich dem Quadrat der Summe von HT und TM, und EL dem von KB, und TZ gleich NR. Folglich iſt das Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM in das Quadrat von KB gleich dem Quadrat von NR.

Achter Satz.

Unter den nämlichen Annahmen ſagen wir, daß, wenn Zahlen, ſo viel man will, von der

*) Euklid. VI. 1.

**) Euklid. VII. 19.

Einheit ab, von gleichem Unterſchiede ſind, die Summe eine Polygonzahl iſt, von ſo viel Ecken, als die Zahl, die um Zwei größer iſt, als der Unterſchied zweier nächſten. Ihre Seite iſt die Anzahl der gegebenen, die Einheit mit gerechnet.

Beweis.

O. A. K.. N... B — RG — DE. L — Z
H. M — X — T

Denn wir haben gezeigt, daß die Summe aller gegebenen Zahlen, vervielfältigt durch acht KB, und zugezählt zu dem Quadrat von NB, das Quadrat von KR gebe *). Setzen wir nun die Einheit AO, ſo erhalten wir KO zur Zwei. Auch KN iſt eine Zwei. Alſo haben NB, KB, OB, gleiche Unterſchiede: alſo macht das achtfache Produkt der größten OB in die mittlere KB, zugeſetzt zu dem Quadrat der kleinſten NB, ein Quadrat, welches zur Seite hat die Summe der größten OB und doppelten mittlern KB **). Daher OB vervielfältigt durch acht KB und zugezählt zu dem Quadrate von NB gleich iſt dem Quadrat der Summe von OB und zweier KB. Die Seite dieſes Qua-

*) Diophantus VI.

**) Diophantus II.

brats um Zwei, nämlich KO, verkürzt, iſt gleich dreien KB. Dies iſt ein Produkt von KB in Drei. Die Drei aber, die Einheit hinzugerechnet, iſt das doppelte der Zwei.

Wenn alſo die Summe der gegebenen Zahlen mit der Einheit dieſelbe Auflöſung giebt, als OB; OB aber, es ſei welche Zahl es wolle, auch die erſte Polygonzahl von Eins ab iſt — weil OA Eins und AB die zweite Zahl iſt — ſo iſt auch die Summe der gegebenen Zahlen eine Polygonzahl von gleichviel Ecken, als OB, und zwar von ſo viel Ecken, als die Zahl Einheiten enthält, die um die Zwei OK, größer iſt, als ihr Unterſchied KB. Sie hat die Seite HT, welches, Eins hinzugerechnet, die Anzahl der gegebenen iſt.

Es iſt alſo erwieſen, was von Hypſikles in der Definition geſagt wird: daß, wenn Zahlen, ſo viel als man will, von der Einheit ab von gleichem Unterſchiede ſind, und dieſer die Einheit iſt, ihre Summe eine Trigonzahl iſt, wenn ihr Unterſchied Zwei, die Summe eine Tetragonzahl; bei dem Unterſchiede Drei eine Pentagonzahl iſt; die Anzahl ihrer Ecken um zwei größer als ihr Unterſchied, die Seite aber die Menge der gegebenen Zahlen iſt, die Einheit hinzugerechnet. Wenn ſie nun Trigonzahlen ſind, — wenn die Einheit der Unterſchied iſt, — ſo werden ihre Seiten die größten der

gegebenen Zahlen ſein, und das Produkt der größten unter den gegebenen in die um Eins größere Zahl wird das Doppelte der beſtimmten Trigonzahl ſein.

Und da OB eine Polygonzahl iſt, die ſo viel Ecken hat, als Einheiten und achtmal vervielfältigt durch eine um Zwei kleinere Zahl, das iſt durch KB, und zugezählt zu dem Quadrat von einer um Vier kleineren Zahl, das iſt von NB, eine Quadratzahl iſt, ſo wird dies die Definition der Polygonzahlen ſein:

Daß jede Polygonzahl, achtmal vervielfältigt durch eine um Zwei kleinere Zahl als die Anzahl ihrer Ecken, und zugezählt zu dem Quadrat von einer um Vier kleineren Zahl als die Anzahl ihrer Ecken, eine Quadratzahl gebe.

Nach ſo erwieſener Definition des Hypſikles von dieſen Polygonzahlen, bleibt zu zeigen übrig, wie aus gegebner Seite die dazu gehörige Polygonzahl gefunden werde?

Denn wenn wir die Seite einer gegebenen Polygonzahl HT und die Anzahl ihrer Ecken haben, ſo iſt uns auch KB gegeben. Alſo werden wir auch das Produkt haben der Summe von HT und TM in KB, welches gleich iſt der Zahl NR. Und da KN die Zwei iſt,

wird auch KR gegeben ſein, alſo auch das Quadrat von KR, und wenn wir hiervon das Quadrat von NB abziehen, welches gegeben iſt, werden wir den Ueberreſt gegeben haben, welcher das Produkt iſt der geſuchten Polygonzahl in das achtfache KB. Alſo iſt die geſuchte Polygonzahl gefunden. Auf ähnliche Weiſe werden wir aus der gegebenen Polygonzahl deren Seite HT finden; welches zu zeigen war.

Neunter Satz.

Was wir methodiſch geſucht haben, wollen wir nun denen, die es in kurzem zu vernehmen wünſchen, mehr praktiſch vortragen.

Wir nehmen die Seite der Polygonzahl doppelt, ziehen davon die Einheit ab; den Reſt vervielfältigen wir durch die um Zwei verkürzte Zahl der Ecken; zu dem Produkte wird Zwei gezählt und die Summe quadrirt; von dem Quadrat ziehen wir ab das Quadrat der um Vier verkleinerten Anzahl der Ecken; den Reſt theilen wir durch das Achtfache der um Zwei verkürzten Anzahl der Ecken: ſo werden wir die Polygonzahl finden.

Iſt dieſe gegeben, ſo finden wir deren Seite auf folgende Art:

Wir vervielfältigen ſie durch das Achtfache der um Zwei verkürzten Anzahl der Ecken; zum Produkt zählen wir das Quadrat der um Vier verkürzten Anzahl der Ecken: ſo werden wir eine Quadratzahl erhalten, wenn die gegebene wirklich eine Polygonzahl war. Von der Seite dieſes Quadrats ziehen wir zwei ab; den Reſt theilen wir durch die um Zwei verkleinerte Anzahl der Winkel, ſetzen die Einheit hinzu und nehmen von der Summe die Hälfte: ſo werden wir die Seite der geſuchten Quadratzahl erhalten.

Zehnter Satz.

Wenn eine Zahl gegeben iſt, finden, auf wie viel Arten ſie eine Polygonzahl ſein könne?

Beweis.

A. T — B — E.. D.. G — K
Z — H

Die gegebene Zahl ſei AB, die Anzahl ihrer Ecken BG. Man nehme in BG die Zwei DG und die Vier EG. Da nun AB als Polygonzahl ſo viel Ecken hat, als BG Einheiten, ſo macht das achtfache Produkt von AB in BD mit dem Quadrat von BE eine Quadratzahl. Die Seite derſelben ſei ZH. Alſo iſt das Qua-

drat von ZH gleich dem achtfachen Produkt von AB in BD zugezählt zu dem Quadrat von BE. Man nehme in AB die Einheit AT, und zerlege das achtfache Produkt von AB in BD in das Vierfache von AT in BD und in das Vierfache von der Summe AB und TB in BD. Man ſetze der vierfachen Summe von AB und TB gleich DK, und verwandle das vierfache Produkt der Summe von AB und TB in BD, in das Produkt von DK in BD, und das vierfache von AT in BD in das doppelte von DE in BD — denn DE iſt zwei. — Das Quadrat von ZH wird alſo gleich ſein dem Produkt von DK in BD zugezählt zu dem doppelten von DE in BD und dem Quadrate von BE. Aber dem doppelten Produkt von DE in BD zugezählt zu dem Quadrate von BE iſt gleich die Summe der Quadrate von BD und DE *). Alſo iſt auch

A . T — B — E . . D . . G — L —— K
Z —— H

das Quadrat von ZH gleich dem Produkt von DK in BD zugezählt zu den Quadraten von BD und DE. Dem Produkte von DK in BD zugezählt zu dem Quadrate von BD iſt gleich das Produkt von BK in BD. Alſo iſt das Quadrat von ZH gleich dem Produkt von BK in BD zugezählt zu dem Quadrate von DE. Und

*) Euklid. II. 7.

Digitized by Google

da DK — das Vierfache der Summe von AB und BT — größer iſt als das Vierfache von AT, das heißt, größer als Vier, wovon DG die Zwei iſt, ſo iſt auch der Reſt GK größer als die Zwei DG. Der Halbtheilungspunkt von DK wird alſo zwiſchen G und K fallen. Er ſei L. Das Quadrat von BL iſt gleich dem Produkt von BK in BD zugezählt zu dem Quadrate von DL *). Wird daher DK in L gehalbtheilt und DB zugeſetzt, und iſt das Quadrat von BL gleich dem Produkt von BK in BD zugezählt zu dem Quadrate von DL, ſo iſt das Quadrat von BL um das Produkt von BK in BD größer als das Quadrat von DL, und das Quadrat von ZH gleich dem Unterſchiede der Quadrate von BL und von DL, zugezählt zu dem Quadrate von DE.

Man ſetze auf beiden Seiten das Quadrat von BL hinzu, ſo ſind die Quadrate von ZH und von DL, zuſammengenommen, gleich denen von BL und von DE, zuſammengenommen. Wenn aber zwei Zahlen zweien andern gleich ſind, ſo ſind es auch bei ihrer Vertauſchung die Unterſchiede, alſo der Unterſchied der Quadrate von DL und von DE gleich dem der Quadrate von BL und von ZH. Und da DE gleich iſt DG, und GL anliegt, ſo iſt das Produkt von EL in GL, zugezählt zu dem Quadrate von DG, gleich dem Quadrate

*) Euklid. II. 6.

Digitized by Google

von DL *). Alſo iſt der Unterſchied der Quadrate von DL und von DG, das heißt, von DL und von DE, oder das Produkt von EL in GL, gleich dem Unterſchiede der Quadrate von BL und von ZH. Man mache ZM gleich BL, weil BL größer iſt als ZH, indem gezeigt iſt, daß die Quadrate von ZH und von DL gleich ſind denen von BL und von DE, und das Quadrat von DL größer iſt, als das von DE — da es größer iſt, als das von DG — mithin das von BL größer als das von ZH.

A. T — B — E.. D.. G — L —— K
Z —— H — N — M

Man ſetze alſo ZM gleich BL, ſo wird der Unterſchied der Quadrate von ZM und ZH gleich ſein dem Produkt von EL in GL. Da nun DK das Vierfache der Summe von AB und TB; DK aber in L gehalbtheilet iſt, ſo iſt DL das doppelte der Summe von AB und TB. Nun iſt DG das doppelte von AT, mithin der Reſt GL das Vierfache von TB, alſo TB der vierte Theil von GL. Allein AT iſt, als Einheit, auch der vierte Theil von EG, der Vier; folglich AB der vierte Theil von EL. Es iſt aber gezeigt, daß auch TB der vierte Theil iſt von GL, mithin iſt das Produkt von AB in TB der ſechzehnte Theil des Produkts von EL in GL. Dies Produkt iſt alſo ſechzehnmal ſo groß,

*) Euklid. II. 7.

als das von AB in TB. Auch iſt gezeigt, daß das Produkt von EL in GL gleich iſt dem Unterſchiede der Quadrate von ZM und von ZH, das heißt dem Quadrate von MH und dem doppelten Produkt von ZH in MH. Folglich iſt das ſechzehnfache Produkt von AB in TB gleich dem Quadrate von MH, zugezählt zu dem doppelten Produkt von ZH in MH. Alſo iſt HM eine Paarzahl. Man halbtheile ſie in N. —

An-

Anmerkungen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Anmerkungen zur Einleitung.

I. II.

Durch die in der Einleitung erklärten Abkürzungen $\mathring{\varsigma}$, $\delta^{\bar{v}}$, $\varkappa^{\bar{v}}$ u. ſ. w. werden beim Diophantus nur die Potenzen der *unbekannten Größe* bezeichnet, alle bekannten Zahlen, auch wenn ſie Potenzen anderer Zahlen ſind, werden durch die gewöhnlichen Zahlbuchſtaben mit dem Zeichen $\mu^{\bar{o}}$ ausgedrückt; daher ſagt Diophantus, das beſtändige Zeichen für eine *beſtimmte* Zahl ſei die Einheit oder das eben erwähnte Zeichen.

Jedes der hier erklärten Zeichen, ſo wie der dadurch bezeichnete Begriff heißt nun bei Diophantus ein εἶδος, lat. species, oder ein *allgemeiner Ausdruck* für eine Zahl, weil es nicht den Zahlenwerth, ſondern nur die *Form* oder die *Geſtalt* der geſuchten Zahlen vorſtellt. Hieraus erklärt es ſich, weßhalb die älteren Mathematiker die Rechnung mit allgemein bezeichneten Größen Algorithmus speciosus genannt haben.

In der Ueberſetzung hat ſich der Verfaſſer nicht der hier feſtgeſetzten Zeichen bedient, ſondern die unbe-

kannte Größe und deren Potenzen durch x, x^2, x^3 bezeichnet, und das Zeichen μ^{o} oder Einheiten für beſtimmte Zahlen, als völlig überflüſſig, weggelaſſen. Da es dem Ueberſetzer vorzüglich nur darauf ankam, die Methode der Alten ſtreng wieder zu geben, ſo wird man ihm dieſe Vertauſchung der unbequemen griechiſchen Zeichen mit den bequemeren und bekannteren Zeichen der neueren Algebra, wohl nicht als Untreue anrechnen. Den Freunden des Alterthums wird es hinreichen, die Bezeichnungsart der Alten aus dieſer Einleitung geſchichtlich kennen zu lernen; die Beibehaltung derſelben durch das ganze Buch würde es aber für denjenigen, der den Diophantus um der Sachen willen zu leſen wünſcht, beinahe unlesbar gemacht haben.

III.

Da ſich die Benennungen ἀριθμοστὸν für $\frac{1}{x}$, δυναμοστὸν für $\frac{1}{x^2}$ u. ſ. w. nicht durch ähnlich gebildete Wörter wie ein **Drittel** oder ein **Viertel** überſetzen laſſen, ſo blieb dem Ueberſetzer nur die Wahl zwiſchen einer ermüdenden Umſchreibung, oder den von ihm gewählten Benennungen: **einfacher Bruch**, **quadratiſcher Bruch**, **kubiſcher Bruch**. Die Ausſtellungen, welche ſich gegen dieſe Ueberſetzung machen laſſen möchten, würden auch jede andere Ueberſetzung z. B. durch **Bruchgröße**, **Bruchquadrat**, **Bruchkubus**

u. ſ. w. treffen, und ohne eine nähere Erklärung würden dieſe eben ſo wenig verſtändlich ſein, als die in der Ueberſetzung gewählten Ausdrücke.

Die letzte Stelle dieſes Satzes bezieht ſich auf die Art, wie man im Griechiſchen Brüche ſchreibt. Neben den Zähler wird nämlich der Nenner mit kleinerer Schrift geſetzt, und durch einen kleinen gewundenen Strich angedeutet, daß er nicht als eine gewöhnliche Zahl, ſondern als der Nenner eines Bruchs zu leſen ſei. So ſchreibt man z. B. $\bar{\alpha}^{\gamma''}$ für $\frac{1}{3}$, $\bar{\delta}^{\xi''}$ für $\frac{4}{7}$, $\bar{\zeta}^{\kappa\delta''}$ für $\frac{7}{24}$. Diophantus will alſo ſagen, daß man auch die allgemeinen Ausdrücke wie ς', $\delta^{\bar{\upsilon}}$, $\kappa^{\bar{\upsilon}}$ u. ſ. w. als Nenner eines Bruches gebrauchen könne, und giebt an, wie man einen ſolchen Bruch benenne, und wie man ihn bezeichne. Die Brüche $\frac{1}{2x^2}$ und $\frac{2}{3x^3}$ werden hiernach alſo durch $\bar{\alpha}^{\delta^{\bar{\upsilon}}\beta''}$ und durch $\bar{\beta}^{\kappa^{\bar{\upsilon}}\bar{\gamma}}$ bezeichnet werden.

V.

Dieſer Satz, ſo wie er im Griechiſchen ausgedrückt iſt, ſcheint eigentlich bloß zu ſagen, daß jeder Bruch mit ſeinem Nenner multiplicirt, 1 gebe, oder daß z. B. $3 \times \frac{1}{3}$ oder $5 \times \frac{1}{5} = 1$ ſei. So richtig dies aber an ſich iſt, ſo liegt doch die gewöhnliche Zahlenrechnung ganz

außer dem Zweck, welchen Diophantus in dieſer Einleitung ſich vorgeſetzt hat, nämlich die Regeln für alle Rechnungen mit allgemein bezeichneten Größen (εἴδη) vorzutragen. Der Sinn des Satzes iſt alſo: wenn man irgend ein εἶδος wie x^2 mit einem Bruche multiplicirt, der eben dieſes εἶδος zu ſeinem Nenner hat, ſo erhalte man eine Einheit oder Einheiten d. i. eine beſtimmte Zahl zum Produkte. So iſt $x^2 \times \frac{1}{x^2} = 1$, $x^2 \times \frac{3}{x^2} = 3$, $x^3 \times \frac{5}{x^3} = 5$ u. ſ. w. Daß dies wirklich der wahre Sinn dieſes Satzes ſei, wird durch eine Vergleichung dieſes und des achten Satzes recht einleuchtend. Dort zeigt Diophantus, was herauskomme, wenn man einen der in III. beſchriebenen Brüche mit einem allgemeinen Ausdruck multiplicire, übergeht aber den Fall, wenn man einen ſolchen Bruch mit ſeinem Nenner multiplicirt, weil dieſer Fall hier hinlänglich erklärt war.

Daß μονὰς nicht immer die Einheit in dem wiſſenſchaftlichen Sinne des Worts, oder wenigſtens die Zahl 1 bedeute, ſondern daß es überhaupt eine beſtimmte Zahl im Gegenſatz eines ſogenannten εἶδος anzeige, iſt aus II. vollkommen deutlich; man bemerke aber noch, daß Diophantus von Ausdrücken wie $3x^2$, $3x^4$, $3x^5$ u. ſ. w. zu ſagen pflegt, ſie ſeien μοναδικῶς, oder in Beziehung auf die beſtimmten Coefficienten einander gleich.

VI.

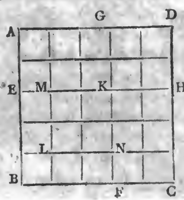
Der Saz lautet im Griechiſchen wörtlich: da die Einheit etwas Unveränderliches und Bleibendes iſt, ſo iſt jeder mit ihr multiplicirte Ausdruck (εἶδος) wieder der nämliche Ausdruck, und dieſe Worte ſcheinen bloß zu ſagen, daß der Faktor 1 ein Produkt nicht verändere. Da aber μονὰς überhaupt eine beſtimmte Zahl bedeutet, ſo ſollen die Worte unſtreitig nichts Anderes ſagen, als was die Ueberſetzung ausdrückt, daß nämlich jedes Produkt beſtimmter Zahlen wieder eine beſtimmte Zahl ſei, und daß daher ein Produkt einer beſtimmten Zahl und eines allgemeinen Ausdrucks wieder ein Ausdruck derſelben Art ſein müſſe. So iſt z. B. $3x^2 \times 5 = 15x^2$; $x^3 \times 4 = 4x^3$, und in dem Produkte bleibt alſo immer derjenige allgemeine Ausdruck, der bereits in einem der Faktoren enthalten war.

Damit der Leſer nicht gleich einen der erſten Säze unrichtig auffaſſe, hielt der Ueberſetzer eine Umſchreibung deſſelben für nothwendig, glaubte aber auch die wörtliche Ueberſetzung mittheilen zu müſſen, da aus der unrichtigen Auslegung dieſer und ähnlicher Stellen vielleicht Theons ſeltſame Erklärung der Einheit entſtanden iſt, nach welcher ſie das Feſte und Bleibende der Zahl iſt, welches auch dann noch bleibt, wenn die Zahl ſelbſt durch Verkleinerung ganz aufgehoben wird.

IX.

Diophantus nennt eine negative Zahl λεῖψις d. i. eine fehlende Größe, oder eine Größe, welche man ſubtrahiren ſoll, eine poſitive Zahl aber nennt er ὕπαρξις d. i. eine wirklich vorhandene, die einen wirklichen beſtimmten Werth hat. Schon dieſe Benennungen zeigen, daß Diophantus beide nur in dem eingeſchränkten arithmetiſchen Sinne kennt, und wenn der Ueberſetzer dafür zuweilen die neueren Ausdrücke poſitiv und negativ ſetzte, ſo geſchah es bloß, um mögliche Mißverſtändniſſe zu verhüten. Obgleich Diophantus die negativen Größen in den Rechnungen ſelbſt vielfältig gebraucht, ſo läßt er doch für die geſuchte Größe nie einen negativen Werth zu, und mehre Einſchränkungen, welche er ſeinen Aufgaben beifügt, haben ihren Grund bloß in der ſtillſchweigenden Vorausſetzung, daß die geſuchte Größe einen poſitiven und rationalen Werth haben ſolle.

Diophantus ſelbſt giebt für die hier ausgeſprochene Regel keinen Beweis, ſondern ſtellt ſie als einen anderwärts bewieſenen Lehnſatz auf. Der Scholiaſt verſucht dieſen Beweis durch eine geometriſche Conſtruction zu führen, und wir wollen hier das Weſentliche deſſelben mittheilen. Er bemerkt zuvörderſt, daß eine λεῖψις nie als etwas für ſich beſtehendes, ſondern immer in Verbindung mit einer ὕπαρξις gedacht werden muß.



Man denke ſich alſo zwei gleiche auf einander winkelrechte Linien AB und BC, deren jede = 5, und theile dieſe Linien in E und F dergeſtalt, daß EB = BF = 3, alſo EA = FC = 2 ſei. Vollendet man das Quadrat EBFK ſo iſt klar, daß es 9 Flächen-Einheiten enthalten muß; man kann ſich aber vorſtellen daß dies Quadrat auf folgende Weiſe entſtanden ſei. Man hat zuerſt die beiden ὑπάρξεις AB und AC multiplicirt, dies gab das Quadrat ABCD, welches 25 Flächen-Einheiten enthält, man hat hierauf die λεῖψις AE mit der ὕπαρξις BC multiplicirt, dies giebt das Rechteck AEDH = 10, welches man von dem vorigen Quadrat abziehen, oder als eine λεῖψις betrachten muß, ſo daß das Rechteck BEHC = 15 als Reſt bleibt. Man hat ferner die ὕπαρξις AB mit der λεῖψις FC multiplicirt, und dies giebt das Rechteck FCDG, = 10, welches man von dem vorigen Reſte abziehen, alſo abermals als eine λεῖψις

betrachten muß. Auf dieſe Art müßte man aber das Quadrat DGHK, welches man als das Produkt der λεῖψις AE und der λεῖψις FC anſehen kann, zwei Mal abziehen, und will man alſo die Subtraction wirklich vornehmen, ſo muß man von dem Quadrat EBFK noch das Quadrat KMLN = DGHK wegnehmen, ſo daß der Gnomon EBFNLM übrig bleibt. Nun iſt aber das Produkt offenbar um KMLN zu klein, und man muß daher das Produkt aus der λεῖψις AE in d e λεῖψις FC d. i. DGHK = KMLN wieder addiren, oder man muß dies Produkt als eine ὕπαρξις betrachten. Hier ſind aber alle bei der Multiplication mögliche Fälle vorgekommen. Man hat eine ὕπαρξις mit einer ὕπαρξις, dann eine λεῖψις mit einer ὕπαρξις und umgekehrt ein ὕπαρξις mit einer λεῖψις, und endlich eine λεῖψις mit einer λεῖψις multiplicirt, und in dem erſten und vierten Falle eine ὕπαρξις, in dem zweiten und dritten eine λεῖψις erhalten.

Wendet man dieſen Beweis auf ein beliebiges Zahlenbeiſpiel an, ſo gewinnt er nicht nur an Deutlichkeit, ſondern möchte auch dem gewöhnlichen Beweiſe dieſer Regel weder an Strenge noch Klarheit nachſtehen. Soll man z. B. 9—4 mit 7—3 multipliciren, ſo kann man zuerſt 9—4 mit 7 multipliciren, und es läßt ſich leicht zeigen, daß das Produkt 9.7—4.7 ſein müſſe. Dies Produkt iſt aber offenbar zu groß, weil man den Multiplicator um 3 Einheiten zu groß angenom-

men hat. Man muß daher noch das Produkt $3 \times (9-4) = 27-12$ davon abziehen, und das Hauptprodukt beſteht aus den Gliedern $+63-28-27+12$, woraus ſich die Regel für die Vorzeichen eines Produktes ganz befriedigend herleiten läßt, wenn man gleich negative Größe in dem eingeſchränkten arithmetiſchen Sinne nimmt.

XI.

Dieſer Satz enthält alles, was Diophantus im Allgemeinen über die Behandlung oder eigentlich nur über die Einrichtung der Gleichungen vorträgt, denn die Regeln der Auflöſung ſelbſt werden in der Folge nur an einzelnen Beiſpielen entwickelt. Das ganze erſte Buch enthält bloß einfache und reine quadratiſche Aufgaben, erſtere häufig von der Form $Ax^n = Bx^{n-1}$, welche ſich aber vermittelſt der Diviſion durch x^{n-1} auf die allgemeine Form aller einfachen Aufgaben $Ax = B$ bringen laſſen, ein Verfahren, welches die ſpäteren Mathematiker ὑποβιβασμὸς oder Erniedrigung nennen.

Nach Diophantus Abſicht ſollen die hier folgenden Aufgaben dem Anfänger als eine Einleitung zu der unbeſtimmten Analytik dienen, welche man mit Recht als den wichtigſten Theil des ganzen Werkes anſieht; wir haben dieſe Einleitung aber nicht mehr vollſtändig übrig, denn Diophantus verſpricht in der Folge zu zeigen, wie man eine Gleichung auflöſen könne, wenn zuletzt

ein zweigliediger Ausdruck einem eingliedigen gleich bleibe, wodurch er zunächſt die vermiſchten quadratiſchen Gleichungen bezeichnen will. Die Regel der Auflöſung wird nun nirgends vollſtändig vorgetragen, in dem vierten, fünften und ſechsten Buche wird ſie aber als bekannt vorausgeſetzt, und man darf nicht zweifeln, daß ſie ſich in der Einleitung zu einem der verloren gegangenen Bücher, welches vermuthlich eine Sammlung von vermiſchten Gleichungen des zweiten Grades enthielt, befunden habe. Die Regel, nach welcher Diophantus ſolche Gleichungen auflöſt, weicht in einigen Stücken von der jetzt üblichen ab, und es wird zweckmäßig ſein, ſich ſein Verfahren bekannt zu machen, damit man die häufig vorkommenden Anwendungen, ſogleich verſtehe. Wenn nämlich eine vermiſchte quadratiſche Gleichung auf die Form

$$ax^2 + bx = c$$

gebracht worden iſt, muß man die bekannte Größe c mit dem Coefficienten von x^2 oder mit a multipliciren, dazu das Quadrat des halben Coefficienten von x oder $\frac{1}{4}b^2$ addiren, aus der Summe die Quadratwurzel ziehen, von dieſer Wurzel den halben Coefficienten von x, alſo $\frac{1}{2}b$, abziehen, und den Reſt durch den Coefficienten von x^2 dividiren, oder es wird

$$x = \frac{-\frac{1}{2}b + \sqrt{(ac + \frac{1}{4}b^2)}}{a} = -\frac{b}{2a} + \frac{+\sqrt{(ac + \frac{1}{4}b^2)}}{a}.$$

Um die Richtigkeit dieſer Formel zu beweiſen, iſt nur erforderlich, daß man die Gleichung $ax^2+bx=c$ nach der gewöhnlichen und als richtig bewieſenen Formel auflöſe, und dann zeige, daß beide Formeln einerlei Werth geben. Behandelt man die Gleichung $ax^2+bx=c$ nach den bekannten Regeln, ſo verwandelt ſie ſich zuerſt in $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$, und man erhält

$$x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)}.$$

Da in den für x gefundenen Werthen die beiden erſten Glieder gleich ſind, ſo iſt nur noch zu zeigen, daß

$$\frac{\sqrt{ac+\frac{1}{4}b^2}}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)}.$$

Die Gleichheit beider Formeln fällt aber in die Augen, denn wenn man in der erſteren den Diviſor a wegläßt, oder, was einerlei iſt, die Formel mit a multiplicirt, ſo muß man, um den vorigen Werth wieder zu erhalten, die Größen hinter dem Wurzelzeichen mit a^2 dividiren, und es iſt alſo

$$\frac{\sqrt{ac+\frac{1}{4}b^2}}{a}=\sqrt{\left(\frac{ac}{a^2}+\frac{b^2}{4a^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)},$$

woraus ſich die Gleichheit beider Formeln für x, alſo auch die Richtigkeit der diophantiſchen Regel ergiebt.

Uebrigens bedarf es kaum der Erinnerung, daß auch bei Diophantus $\frac{b}{2a}$ poſitiv wird, wenn bx negativ war, und daß ac ſowohl poſitiv als negativ ſein kann, je

nachdem c poſitiv oder negativ iſt. Die Formel kann alſo auch geſchrieben werden

$$x = \pm \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ac)}}{a}.$$

Die Quadratwurzel wird bei Diophantus aber alle Mal als poſitiv angeſehen, weil er die negativen Wurzeln einer Potenz noch nicht kennt, ein Begriff über welchen ſelbſt Vieta und Harriot in ſeiner Praxis artis analyticae (1631) noch nicht völlig im Reinen waren, und den erſt Carteſius richtiger entwickelt hat.

Anmerkungen zum erſten Buche.

I.

Dieſe Aufgabe wird in den neueren Lehrbüchern gewöhnlich ſo ausgedrückt: aus der gegebenen Summe und Differenz zweier Zahlen dieſe Zahlen ſelber zu finden. Bezeichnet man die größere der beiden Zahlen durch x, die kleinere durch y, die gegebene Summe durch s, die gegebene Differenz durch d, ſo hat man zwei Gleichungen, nämlich

$$1)\ x + y = s.\quad 2)\ x - y = d,$$

und daraus nach bekannten Regeln

$$x = \frac{s+d}{2} \text{ und } y = \frac{s-d}{2}.$$

Das Verfahren, durch welches Diophantus die Aufgabe löſ't, iſt von dem hier angedeuteten etwas verſchieden, da nur eine unbekannte Größe in der Rechnung gebraucht wird. Prüft man aber die Aufſöſung des Diophantus näher, und überlegt, was in der Rechnung weſentlich oder bloß zufällig iſt, ſo ergiebt ſich daraus die nämliche Regel, welche wir durch die obigen Formeln ange-

deutet haben, und Diophantus wendet daher in der Folge dieſe Regel in beſtimmter Beziehung auf die hier gegebene Aufloͤſung an. Die Kunſt, eine Rechnungsregel durch Zeichen darzuſtellen, kannten die Alten freilich nicht, dagegen wußten ſie ſehr wohl aus einer, an einem beſtimmten Beiſpiele durchgefuͤhrten Rechnung eine allgemeine Regel herzuleiten, indem ſie den ganzen Gang der Rechnung verfolgten, und dabei das Weſentliche und Zufaͤllige von einander ſonderten. Auf dieſe Art wußten ſie ſich den Gebrauch der Buchſtabenrechnung und allgemeiner Formeln zu erſetzen, und wenn gleich dadurch das Verfahren ſchwieriger und umſtaͤndlicher wird, ſo muß man doch auch zugeben, daß es fuͤr den Verſtand uͤbender ſein muͤſſe, als der Gebrauch allgemeiner Formeln.

Die Worte, welche ich hier durch eine Umſchreibung gegeben habe: ſetzen wir dieſen Werth von x in die allgemeinen Ausdruͤcke fuͤr die geſuchten Zahlen, lauten im Griechiſchen: ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. Wir wollen hierbei ein fuͤr alle Mal bemerken, daß ὑπόστασις eigentlich der in allgemeinen Zeichen ausgedruͤckte Werth einer Groͤße, oder der bei einer Aufgabe gemachte Anſatz ſei. Folgte z. B. aus den Bedingungen einer Aufgabe, daß die eine der geſuchten Groͤßen durch $2x - 5$, die andere durch $\frac{1}{2}x + 2$ ſich ausdruͤcken laſſe, ſo heißen dieſe allgemeinen Ausdruͤcke die ὑποστάσεις der Aufgabe. Um die Aufgabe zu loͤſen, iſt alſo nur erforderlich, daß man den

den Zahlenwerth von x berechne, und dieſen ſtatt x in die obigen Formeln ſetze. Dieſe Rechnung iſt es nun, welche Diophantus immer mit den Worten ἐπὶ τὰς ὑποςάσεις bezeichnet.

Diophantus beſchließt die gegebene Auflöſung in der Regel mit der Bemerkung, der Beweis falle in die Augen, oder auch, die gefundenen Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt, und in einzelnen Fällen wird dies auch wohl durch eine Probe dargethan. Für manchen Leſer möchte daher die Bemerkung nicht überflüſſig ſein, daß von analytiſchen Auflöſungen, wie dieſe, ein Beweis gar nicht gefordert werden kann, da jeder Schritt der Auflöſung entweder durch allgemein bekannte oder ausdrücklich vorangeſchickte Lehnſätze gerechtfertigt wird.

II.

Um die Aufgabe allgemein zu löſen, nehme man an, die Zahl a ſolle in dem Verhältniß n:m, oder was einerlei iſt, in dem Verhältniß $1:\frac{m}{n}$ getheilt werden.

Setzt man nun das eine der geſuchten Stücke $= x$, ſo iſt das andere $= \frac{m}{n}x$, und die Summe beider $= x + \frac{m}{n}x$ $= \frac{n+m}{n}x$. Da die Summe beider Stücke auch $= a$ ſein muß, ſo hat man die Gleichung

$$\frac{n+m}{n}x = a, \text{ folglich } x = \frac{an}{n+m}.$$

III.

Nimmt man dagegen an, die Zahl a ſolle ſo getheilt werden, daß der eine Theil ein beſtimmtes Vielfaches der andern um eine gegebene Zahl p überſteigt, ſo ſetze man die kleinere Zahl $= x$, ſo wird die größere $= mx + p$, die Summe beider aber $= (m+1)x + p$ ſein. Hieraus hat man aber

$$(m+1)x + p = a, \text{ und } x = \frac{a-p}{m+1}.$$

Die Aufgabe lautet im Griechiſchen eigentlich: eine gegebene Zahl in einem vorgeſchriebenen Verhältniß und Ueberſchuß zu theilen (ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τοῖς δοθεῖσιν). Dieſer Ausdruck könnte leicht ſo verſtanden werden, als ſollten die Zahlen ein vorgeſchriebenes Verhältniß und eine vorgeſchriebene Differenz haben, ein Fall der in der vierten Aufgabe wirklich vorkommt. Um jedes Mißverſtändniß zu verhüten, wählte der Ueberſetzer einen andern Ausdruck, zu deſſen Rechtfertigung folgende Bemerkung hinreichen wird. So oft Diophantus zwiſchen zwei Zahlen ein beſtimmtes Verhältniß annimmt, ſo drückt er die eine Zahl als ein Vielfaches der anderen aus, d. h. er nimmt alle Mal ein Verhältniß an, in welchem das erſte Glied 1, das zweite irgend eine ganze Zahl iſt, und bei Diophantus iſt es alſo einerlei, ob man ſagt: eine Zahl habe gegen die andere ein vorgeſchriebenes Verhältniß, oder die eine Zahl ſei ein beſtimmtes Vielfaches der an-

deren. Wenn Diophantus alſo ſagt, eine Zahl habe gegen die andere ein beſtimmtes Verhältniß mit Ueberſchuß, ſo heißt das: ſie ſolle um eine beſtimmte Zahl größer ſein, als ein beſtimmtes Vielfaches der anderen.

IV.

Die Aufgabe ſei allgemein: zwei Zahlen zu ſuchen, die ſich wie n:m, oder wie $1:\frac{m}{n}$ verhalten, und deren Unterſchied $= d$ ſei.

Setzt man die kleinere Zahl $= x$, ſo iſt die größere $\frac{m}{n}x$. Der Unterſchied beider iſt $\frac{m}{n}x - x = \frac{m-n}{n}x$, und da eben dieſer Unterſchied $= d$ ſein ſoll, ſo hat man

$$\frac{m-n}{n}x = d, \text{ folglich } x = \frac{dn}{m-n}.$$

V.

Um die Aufgabe allgemein zu löſen, ſetze man die gegebene Zahl $= s$, und nehme an, ſie ſolle in zwei Zahlen von der Beſchaffenheit getheilt werden, daß $\frac{1}{m}$ der erſten und $\frac{1}{n}$ der zweiten zuſammen genommen die vorgeſchriebene Zahl s gebe, wobei wir $n > m$ annehmen wollen.

Man ſetze $\frac{1}{n}$ der zweiten Zahl $= x$, ſo iſt die zweite Zahl ſelbſt $= nx$, und $\frac{1}{m}$ der erſten Zahl $= s - x$,

folglich die erſte Zahl ſelbſt $= m(s-x) = ms - mx$. Da die Summe beider Zahlen $= a$ ſein muß, ſo hat man die Gleichung

$$nx - mx + ms = a, \text{ und } x = \frac{a - ms}{n - m}.$$

Aus dieſer Formel läßt ſich der Grund der beiden von Diophantus angeführten Einſchränkungen leicht überſehen. Zuerſt ſoll man von den beiden geſuchten Zahlen mit den nämlichen aliquoten Theil nehmen, welches geſchehen würde, wenn $n = m$ wäre; denn es iſt klar, daß in dieſem Falle s nothwendig $\frac{a}{n} = \frac{a}{m}$ ſein müßte, und alſo nicht mehr willkührlich beſtimmt werden könnte. Zweitens ſoll s zwiſchen den Grenzen $\frac{a}{n}$ und $\frac{a}{m}$ enthalten, nämlich in unſerem Falle größer als $\frac{a}{n}$, und kleiner als $\frac{a}{m}$ ſein. Denn wäre $s = \frac{a}{m}$, folglich $ms = a$, ſo würde $a - ms = 0$, und wäre $s > \frac{a}{m}$, folglich $ms > a$, ſo würde $a - ms$ negativ ſein; in dem erſten Falle würde aber $x = 0$, in dem zweiten gar negativ werden; es iſt aber ſchon oben bemerkt worden, daß Diophantus alle negative Werthe ausſchließt, und alle Mal poſitive Werthe ſucht.

Wäre ferner $s = \frac{a}{n}$, alſo $ns = a$, ſo verwandelte ſich unſere Formel in folgende

$$x = \frac{ns - ms}{n - m}.$$

Hieraus findet man aber $x = s$, folglich würde $\frac{1}{m}$ der erſten Zahl $= o$ werden.

VI.

Die Aufgabe ſei allgemein folgende: Man ſoll die Zahl a in zwei andere Zahlen von der Beſchaffenheit zerſtückeln, daß $\frac{1}{n}$ der erſten um die Zahl d größer ſei als $\frac{1}{m}$ der zweiten.

Man ſetze $\frac{1}{m}$ der zweiten Zahl $= x$, ſo iſt zweite Zahl $= mx$, und $\frac{1}{n}$ der erſten Zahl $= x + d$, folglich die erſte Zahl ſelber $= nx + nd$, die Summe beider geſuchten Zahlen iſt alſo $= mx + nx + nd$, und da eben dieſe Summe auch $= a$ ſein ſoll, ſo hat man die Gleichung

$$mx + nx + nd = a, \text{ und } x = \frac{a - nd}{m + n}.$$

Die der Aufgabe beigefügte Einſchränkung ſagt eigentlich, daß d kleiner ſein müſſe als $\frac{a}{n}$, wovon der Grund aus der Formel deutlich einzuſehen iſt. Denn wäre $d = \frac{a}{n}$, folglich $dn = a$, ſo würde $a - nd$, alſo auch $x = o$; wäre aber $d > \frac{a}{n}$, folglich $nd > a$, ſo würde $a - nd$, alſo auch x ſelbſt, negativ werden.

VII.

Die größere der gegebenen Zahlen ſei a, die kleinere b, die geſuchte $= x$, ſo wird der größere Reſt $= x - b$, der kleinere $= x - a$. Soll nun der kleinere Reſt ſich zu dem größeren verhalten, wie $n:m$ oder wie $1:\frac{m}{n}$, ſo hat man die Proportion

$$x - a : x - b = 1 : \frac{m}{n}.$$

Daraus folgt aber

$$\frac{m(x-a)}{n} = x - b, \text{ und } x = \frac{am - bm}{m - n}.$$

VIII.

Die geſuchte Zahl heiße wiederum x, die größere der gegebenen Zahlen ſei a, die kleinere b, folglich die größere Summe $= x + a$, die kleinere Summe $= x + b$. Iſt nun vorgeſchrieben, daß die größere Summe zu der kleineren ſich verhalten ſolle, wie $m:n$, ſo hat man die Proportion

$$x + a : x + b = m : n$$

Daraus folgt aber

$$mx + bm = nx + an, \text{ und } x = \frac{an - bn}{m - n}.$$

Die Bedingung, welche Diophantus dieſer Aufgabe beifügt, ſagt eigentlich, daß das Verhältniß $m:n$ kleiner als das Verhältniß $a:b$ ſein müſſe, und aus der Formel überſieht man leicht den Grund dieſer Bedingung.

Wäre nämlich $m:n = a:b$, folglich $an = bm$, ſo würde $an - bm = 0$, und wäre $m:n > a:b$, folglich bm größer als an, ſo würde $an - bm$ negativ, alſo in beiden Fällen die Auflöſung, welche poſitive Zahlen verlangt, unmöglich.

Um Mißverſtändniſſe zu verhüten, bemerke man, daß die Alten die Größe eines Verhältniſſes anders beſtimmen als die Neueren. Wir beurtheilen nämlich die Größe eines Verhältniſſes nach dem Exponenten, oder dem Quotienten des Hintergliedes durch das Vorderglied, und ein Verhältniß iſt alſo um ſo größer, je größer das Hinterglied in Vergleichung mit dem Vordergliede iſt. Aus der Erklärung bei Euklides V, 7. folgt aber, daß bei den Alten ein Verhältniß um deſto größer heißt, je größer das Vorderglied in Vergleichung mit ſeinem Hintergliede iſt. Das Verhältniß $A:B$ iſt nämlich größer als $C:D$, wenn nA zwar größer als mB, aber nC nicht größer als mD iſt. Wollte man alſo das Verhältniß $C:D$ dem Verhältniſſe $A:B$ gleich machen, ſo müßte man entweder C vergrößern, oder D verkleinern, woraus ſich die Richtigkeit der obigen Bemerkung von ſelbſt ergiebt.

In dem vorliegendem Falle iſt das Verhältniß $a:b = 100:20 = 5:1$, das Verhältniß der größeren Summe zur kleineren aber ſoll $3:1$ ſein. In dem Sinne der Alten iſt nun das Verhältniß $3:1$ kleiner als das Verhältniß $5:1$, in dem Sinne der Neueren würde aber das

Verhältniß 3:1 größer als 5:1 ſein, da jenes den Exponenten $\frac{1}{3}$, dieſes den Exponenten $\frac{1}{5}$ hat.

IX.

Bezeichnet man wieder die größere der gegebenen Zahlen durch a, die kleinere durch b, die geſuchte Zahl durch x, ſo iſt a—x der größere, b—x der kleinere Reſt. Soll nun der größere Reſt ſich zu dem kleineren Reſte wie m:n verhalten, ſo hat man die Proportion

$$a - x : b - x = m : n, \text{ und } x = \frac{bm - an}{m - n}.$$

Die Bedingung verlangt, daß m:n größer als a:b ſei, denn wäre m:n = a:b folglich an = bm, ſo würde bm—am = 0, wäre aber m:n < a:b, folglich bm kleiner als an, ſo würde bm—an negativ werden.

X.

Die geſuchte Zahl heiße x, diejenige zu welcher man x addiren ſoll, heiße a, diejenige von der man x ſubtrahiren ſoll b, ſo iſt die Summe = a+x, und der Reſt = b—x. Soll nun die Summe a+x n Mal ſo groß ſein als der Reſt b—x, ſo hat man die Gleichung

$$a + x = bn - nx, \text{ und } x = \frac{bn - a}{n + 1}.$$

Diophantus drückt ſich bei der Auflöſung dieſer Aufgabe ſo aus, als ob die Summe a+x nothwendig größer ſein müſſe als der Reſt b—x, denn wo die

Ueberſetzung beſtimmt die Summe oder den Reſt nennt, da ſagt Diophantus bloß die größere oder die kleinere Zahl, beſtimmt aber deſſen ungeachtet, daß die kleinere Zahl vier Mal genommen $=400-4x$ ſei. Wenn der Ueberſetzer, um jedem Mißverſtändniß vorzubeugen, einen beſtimmteren Ausdruck wählte, ſo glaubt er doch, daß Diophantus mit dem unbeſtimmten Ausdruck eben beide Fälle umfaſſen wollte, und wirklich iſt die Auflöſung nicht weſentlich verſchieden, man mag die Summe oder den Reſt als die größere Zahl anſehen. Denn geſetzt der Reſt $b-x$ ſolle n Mal größer ſein, als die Summe $a+x$, ſo hat man die Gleichung

$$n(a+x) = bx, \text{ alſo } x = \frac{b-an}{n+1}.$$

Die beiden für x gefundenen Formeln zeigen noch, daß der Exponent n nicht jede beliebige Größe haben kann; ſoll nämlich die Summe die größere Zahl ſein, ſo muß bn größer als a ſein; ſoll aber der Reſt die größere Zahl ſein, ſo muß an kleiner als b ſein, weil man ſonſt für x einen negativen Werth erhält.

XI.

Die geſuchte Zahl heiße wiederum x, die gegebene Zahl, welche man dazu addiren ſoll, ſei a, die welche man ſubtrahiren ſoll b, folglich wird die Summe $=x+a$, der Reſt $=x-b$. Soll nun jene Summe n Mal größer ſein als dieſer Reſt, ſo hat man die Gleichung

$$n(x-b) = x+a, \text{ und } x = \frac{a+bn}{n-1}.$$

Da Diophantus für n immer eine ganze Zahl nimmt, ſo konnte er den Fall nicht berückſichtigen, wenn der Reſt größer ſein ſoll, als die Summe. Denn geſetzt der Reſt ſolle n Mal größer ſein als die Summe, ſo hätte man die Gleichung

$$n(x+a)=x-b, \text{ folglich } x=-\frac{an+b}{n-1}.$$

XII. XIII.

Um die Auflöſung der zwölften Aufgabe allgemein vorzuſtellen, bezeichne man die Zahl, die man zerſtückeln ſoll, durch a, den kleineren Theil aus der zweiten Zerſtückelung durch x. Soll nun der größere Theil aus der erſten Zerſtückelung n Mal ſo groß ſein, als der zweite Theil aus der zweiten Zerſtückelung, ſo iſt der größere Theil aus der erſten Zerſtückelung $=nx$, und der kleinere $=a-nx$. Soll ferner der größere Theil aus der zweiten Zerſtückelung m Mal ſo groß ſein, als der kleinere aus der erſten Zerſtückelung, ſo wird derſelbe $=am-mnx$. Nun muß die Summe der beiden Stücke $am-mnx+x$ der gegebenen Zahl a gleich ſein. Man hat alſo die Gleichung

$$am-mnx+x=a, \text{ und } x=\frac{(m-1)a}{mn-1}.$$

In unſerem Falle iſt $m-1=2$, alſo $(m-1)a=200$, ferner iſt $mn-1=5$, alſo $x=\frac{200}{5}=40$.

Die Auflöſung der XIII Aufgabe läßt ſich auf dieſelbe Art allgemein vorſtellen.

XIV.

Dieſe Aufgabe iſt, ſo wie Diophantus ſie ausdrückt, eine unbeſtimmte; denn man ſucht zwei unbekannte Größen, die wir allgemein durch x und y bezeichnen wollen, man hat aber zur Auflöſung nur eine einzige Gleichung

$$3(x+y) = xy.$$

Diophantus nimmt nun für eine der unbekannten Größen die beſtimmte Zahl 12 an, und berechnet daraus die andere. Dadurch wird aber die ganze Aufgabe verändert, und ſie ſollte nunmehr auf folgende Art ausgedrückt werden:

> es iſt eine beſtimmte Zahl a gegeben, man ſoll eine andere Zahl x von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt beider n Mal ſo groß wird als ihre Summe.

Aus dieſen Bedingungen ergiebt ſich die Gleichung

$$n(a+x) = ax, \text{ und } x = \frac{an}{a-n}.$$

Aus dieſer Formel überſieht man zugleich den Sinn und den Grund der Einſchränkung, welche Diophantus der Aufgabe beifügt. Zur Auflöſung der unbeſtimmten Aufgabe iſt nämlich erforderlich, daß man für die eine der geſuchten Zahlen eine beſtimmte Zahl a wähle; nimmt man dieſe aber kleiner als den Exponenten n des vorgeſchriebenen Verhältniſſes, ſo wird der Nenner a—n, und dadurch x ſelbſt, negativ.

XV.

Was die erſte der geſuchten Zahlen von der zweiten erhalten ſoll, ſei $= a$, was die zweite von der erſten erhalten ſoll $= b$; ferner ſei vorgeſchrieben, daß die erſte Zahl n Mal, und die zweite Zahl m Mal ſo groß werde als der Reſt, nachdem jene a, und dieſe b, von der andern erhalten hat. Man ſetze die zweite Zahl $= x + a$, die erſte $= nx - a$, ſo iſt bereits die erſte Bedingung der Aufgabe erfüllt, denn wenn man nun von der zweiten die Größe a wegnimmt, und ſie zu der erſten hinzulegt, ſo wird jene x und dieſe nx, wie die Aufgabe vorſchreibt.

Zieht man aber von der erſten Zahl die Größe b ab, und legt eben dieſe Größe der zweiten Zahl zu, ſo wird jene $= nx - (a + b)$, und dieſe $= x + (a + b)$. Die letztere Zahl ſoll aber nach dieſer Veränderung m Mal ſo groß als die erſtere ſein, man hat daher die Gleichung

$$mnx - m(a+b) = x + (a+b),$$

und daraus findet man, nach einigen leichten Veränderungen,

$$x = \frac{(m+1)(a+b)}{mn-1}.$$

In unſerer Aufgabe iſt $a = 30$, $b = 50$, $n = 2$, $m = 3$, daher wird $a + b = 80$, $m + 1 = 4$ alſo $(m+1)(a+b) = 320$; ferner iſt $mn - 1 = 5$, alſo $x = \frac{320}{5} = 64$.

Hieraus findet man die erſte Zahl oder $nx - a = 98$, die zweite Zahl oder $x + a = 94$.

XVI.

Die Summe der erſten und zweiten Zahl ſei $= a$, die Summe der zweiten und dritten $= b$, die Summe der erſten und dritten $= c$, die unbekannte Summe der drei geſuchten Zahlen aber ſei $= s$. Nun iſt die dritte Zahl $= s - a$, die zweite $= s - c$, die erſte $= s - b$, und die Summe aller drei Zahlen wird daher auch $3s - (a + b + c)$. Man hat alſo die Gleichung

$$3s - (a + b + c) = s, \text{ alſo } s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Hat man nach dieſer Formel die Summe der drei Zahlen oder s berechnet, ſo finden ſich die Zahlen $s - a$, $s - b$, $s - c$ durch bloße Subtraction. Auch zeigt die Formel, warum die halbe Summe der drei gegebenen Zahlen größer ſein muß, als jede derſelben einzeln genommen. Denn wäre eine derſelbe $= \frac{a + b + c}{2}$, ſo wäre ſie eben darum auch $= s$, d. i. der Summe von allen dreien gleich, und die Summe der beiden übrigen müßte $= 0$ ſein, was nur möglich wäre, wenn beide einander gleich, aber entgegengeſetzt wären.

Uebrigens läßt ſich dies Verfahren auf ſo viele Zahlen ausdehnen, als man will.

XVII.

Wie dieſe Auflöſung ſich ganz allgemein machen laſſe, fällt in die Augen. Man ſetze nämlich ſtatt der Zahlen 20, 22, 24, 27 der Reihe nach die Buchſtaben a, b, c, d, und bezeichne die unbekannte Summe der vier geſuchten Zahlen durch s, ſo erhält man für die geſuchten Zahlen die allgemeinen Ausdrücke s—a, s—b, s—c, s—d, und es ergiebt ſich wie vorher die Gleichung

$$4s-(a+b+c+d) = s, \text{ alſo } s=\frac{a+b+c+d}{3}.$$

Hat man nach dieſer Formel den Werth von s gefunden, ſo ergiebt ſich der Werth der vier geſuchten Zahlen wieder durch bloße Subtraction, auch zeigt die Formel deutlich an, warum das Drittel von der Summe der vier gegebenen Zahlen kleiner ſein muß, als jede dieſer Zahlen einzeln genommen. Denn wäre eine dieſer Zahlen $=\frac{a+b+c+d}{3}$, ſo wäre ſie auch $=s$, d. h. der Summe der vier geſuchten Zahlen gleich, die Summe der drei übrigen müßte daher $=0$ ſein, was nicht anders geſchehen kann, als wenn wenigſtens eine derſelben negativ iſt.

XVIII.

Um den Schluß, durch welchen Diophantus die dritte Zahl findet, deutlich einzuſehen, bezeichne man die

drei geſuchten Zahlen der Reihe nach durch die Buchſtaben A, B und C. Nach der Annahme iſt

$$A + B - C = 20, \text{ oder } A + B = C + 20.$$

Addirt man alſo an beiden Seiten die Zahl C, ſo erhält man

$$A + B + C = 2C + 20.$$

Das heißt bei Diophantus: die Summe der drei Zahlen beſteht aus der Differenz 20 und dem Doppelten der dritten Zahl. Wird alſo die Summe der drei Zahlen durch 2x bezeichnet, ſo iſt

$$2C + 20 = 2x, \text{ alſo } C = x - 10.$$

Aus den Bedingungen hat man ferner

$$B + C = A + 30.$$

Addirt man an beiden Seiten A, ſo erhält man

$$A + B + C = 2A + 30.$$

Setzt man ſtatt A+B+C wiederum 2x ſo wird

$$2A + 30 = 2x, \text{ folglich } A = x - 15.$$

Aus den Bedingungen folgt endlich

$$A + C = B + 40, \text{ oder } A + B + C = 2B + 40.$$

Setzt man A+B+C=2x, ſo wird

$$2B + 40 = 2x, \text{ folglich } B = x - 20.$$

XIX.

In dieſer Auflöſung findet Diophantus die zweite Zahl =25 durch folgenden Schluß.

Man bezeichne die geſuchten Zahlen wieder der Reihe nach durch A, B, C, die gegebenen Unterſchiede 20, 30, 40 durch D, d, δ, ſo iſt

$$1.\ A+B=C+D$$
$$2.\ B+C=A+d$$
$$3.\ A+C=B+\delta\ ;$$

Addirt man nun die erſte und zweite Gleichung, und zieht an beiden Seiten A+C ab, ſo erhält man

$$2B=D+d,\ \text{alſo}\ B=\frac{D+d}{2}=\frac{20+30}{2}=25.$$

Addirt man die erſte und dritte Gleichung, und zieht an beiden Seiten B+C ab, ſo erhält man

$$2A=D+\delta,\ \text{alſo}\ A=\frac{D+\delta}{2}=\frac{20+40}{2}=30.$$

Addirt man endlich die zweite und dritte Gleichung, und zieht an beiden Seiten A+B ab, ſo erhält man

$$2C=d+\delta,\ \text{alſo}\ C=\frac{d+\delta}{2}=\frac{30+40}{2}=35,$$

und man ſieht hieraus, daß Diophantus nicht bloß die zweite, ſondern alle drei Zahlen durch den von ihm angewandten Schluß hätte finden können, ohne irgend eine unbekannte Größe in die Rechnung einzuführen.

XX.

Man bezeichne die geſuchten Zahlen der Reihe nach durch A, B, C, E, die gegebenen Unterſchiede durch D, d, Δ, δ. Nun hat man aus den Bedingungen der Aufgabe

1. A+

$$1.\ A+B+C=E+D.$$
$$2.\ B+C+E=A+d.$$
$$3.\ C+E+A=B+\Delta.$$
$$4.\ E+A+B=C+\delta.$$

Wenn man nun in der erſten Gleichung an beiden Seiten E addirt, ſo erhält man

$$A+B+C+E=2E+D,$$

und dieſe Gleichung ſagt daſſelbe, was Diophantus mit Worten ausdrückt. In der erſten Gleichung iſt nämlich D der Ueberſchuß der drei erſten Zahlen über die vierte, in der abgeleiteten Gleichung aber iſt D der Ueberſchuß aller vier Zahlen über das Doppelte der vierten. Setzt man nun die Summe der vier Zahlen $=2x$, ſo hat man

$$2x=2E+D, \text{ alſo } E=x-\frac{1}{2}D.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, wenn man an beiden Seiten A addirt,

$$2x=2A+d, \text{ alſo } A=x-\frac{1}{2}d.$$

Aus der dritten Gleichung folgt, wenn man an beiden Seiten B addirt,

$$2x=2B+\Delta, \text{ alſo } B=x-\frac{1}{2}\Delta.$$

Aus der vierten Gleichung endlich folgt, wenn man zu beiden Seiten C addirt,

$$2x=2C+\delta, \text{ alſo } C=x-\frac{1}{2}\delta.$$

Addirt man die für A, B, C, E gefundenen Werthe, ſo findet man ihre Summe

$$=4x-\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}\Delta-\frac{1}{2}\delta=4x-\frac{D+d+\Delta+\delta}{2},$$

und da eben dieſe Summe $=2x$ ſein ſoll, ſo hat man

$$4x-\frac{D+d+\Delta+\delta}{2}=2x$$

folglich $x=\frac{D+d+\Delta+\delta}{4}$.

Man findet alſo die halbe Summe der geſuchten Zahlen, wenn man die Summe der gegebenen Unterſchiede durch 4 dividirt, daraus aber erhält man die Zahlen ſelbſt durch die bloße Subtration der halben Unterſchiede.

Aus den gefundenen Formeln ergiebt ſich auch der Grund der beigefügten Bedingung, nach der jede der gegebenen Zahlen kleiner ſein muß, als die halbe Summe derſelben. Denn geſetzt es wäre eine dieſer Zahlen z. B. D der halben Summe aller vier Zahlen gleich, alſo

$$D=\frac{D+d+\Delta+\delta}{2},$$

ſo wäre auch

$$\frac{1}{2}D=\frac{D+d+\Delta+\delta}{4}=x.$$

Daher würde $E=x-\frac{1}{2}D=0$. Setzte man D größer als die halbe Summe aller vier Zahlen, ſo würde $\frac{1}{2}D$ größer als x, folglich E ſogar negativ werden.

XXI.

Um den Schluß durch welchen Diophantus die Summe der zweiten und dritten Zahl, imgleichen die

Summe der dritten und vierten Zahl findet, deutlich einzuſehen, bezeichne man die vier geſuchten Größen wieder durch A, B, C, E, die gegebenen Unterſchiede aber durch D, d, Δ, δ, wie in der vorigen Aufgabe. Nun hat man

$$1.\ A+B+C=E+D.$$
$$2.\ B+C+E=A+d.$$
$$3.\ C+E+A=B+\Delta.$$
$$4.\ E+A+B=C+\delta.$$

Wenn man nun die beiden erſten Gleichungen addirt, und an beiden Seiten A+E abzieht, ſo erhält man

$$5.\ 2B+2C=D+d,\ \text{alſo}\ B+C=\frac{D+d}{2}.$$

Wenn man aber die dritte und vierte Gleichung addirt, und an beiden Seiten B+C abzieht ſo erhält man

$$6.\ 2A+2E=\Delta+\delta,\ \text{alſo}\ A+E=\frac{\Delta+\delta}{2},$$

und man ſieht, daß man auf eben dieſe Art die Summe von je zweien dieſer Zahlen berechnen konnte. Indeß ergiebt ſich aus den vier Gleichungen folgende ganz einfache Auflöſung.

Man addire in der erſten Gleichung zu beiden Seiten E, in der zweiten A, in der dritten B, in der vierten C, ſo erhält man an der linken Seite alle Mal die Summe der vier größen A+B+C+E, welche wir der Kürze wegen durch s bezeichnen wollen. Die obigen vier Gleichungen verwandeln ſich alſo in folgende:

$$7.\ s = 2E + D.$$
$$8.\ s = 2A + d.$$
$$9.\ s = 2B + \Delta.$$
$$10.\ s = 2C + \delta.$$

Addirt man die letzten vier Gleichungen, ſo erhält man

$$11.\ 4s = 2A + 2B + 2C + 2E + D + d + \Delta + \delta.$$

Nun iſt aber (nach 6) $2A+2E=\Delta+\delta$, und (nach 5) $2B+2C=D+d$, folglich verwandelt ſich die letzte Gleichung in dieſe

$$12.\ 4s = 2D + 2d + 2\Delta + 2\delta,$$

und es wird $s = \frac{D+d+\Delta+\delta}{2}$.

Hieraus findet man alſo ſehr leicht die Summe der vier gegebenen Zahlen, und die einzelnen Zahlen ergeben ſich nun durch einen aus den Gleichungen 7. 8. 9. 10. leicht abzuleitenden Schluß. Es iſt nämlich

$$A = \frac{s-d}{2},\ B = \frac{s-\Delta}{2};$$
$$C = \frac{s-\delta}{2},\ E = \frac{s-D}{2}.$$

XXII.

Die gegebene Zahl heiße a, die dritte der geſuchten Zahlen ſei $= x$, ſo iſt die Summe der beiden erſten $= a - x$. Nun verlangt die Aufgabe, daß die Summe der beiden erſten Zahlen 3 Mal, oder allgemein ausge-

drückt, n Mal größer ſein ſoll als die dritte; hieraus erhält man die Gleichung

$$nx = a - x, \text{ folglich } x = \frac{a}{n+1}.$$

Durch dieſe Formel erhält man die dritte Zahl, und erfährt zugleich die Summe der erſten und zweiten. Auf dieſelbe Weiſe aber, wie man die dritte Zahl findet, kann auch die erſte gefunden werden. Denn ſetzt man die erſte Zahl $= z$, ſo iſt die Summe der beiden letzten $= a - z$, und wenn dieſe m Mal größer ſein ſoll als die erſte, ſo hat man die Gleichung

$$mz = a - z, \text{ folglich } z = \frac{a}{m+1}$$

eine Formel, die mit der vorigen dem Weſentlichen nach ganz übereinſtimmt.

Da beide Zahlen x und z auf dieſelbe Weiſe, jede aber durch ein beſonders Verfahren gefunden werden, ſo bezeichnet Diophantus jede derſelben durch ς' oder das Zeichen für die unbekannte Größe. In der Folge, wo zum Behuf der eigentlichen Aufgabe eine oder mehre vorläufige Aufgaben zu löſen ſind, bezeichnet ς' oder x oft ganz verſchiedene Größen, was aber bei einiger Aufmerkſamkeit gar keine Verwirrung veranlaſſen kann, da man jeden Theil der Auflöſung als ein beſonderes Verfahren betrachten muß.

XXIII.

Um für die Auflöſung eine allgemeine Regel zu haben, wollen wir die Bedingungen der Aufgabe in folgender Art ausdrücken:

1) die größte Zahl ſoll um $\frac{1}{p}$ der kleinſten Zahl größer ſein als die mittelſte,

2) die mittelſte Zahl ſoll um $\frac{1}{m}$ der größten Zahl größer ſein als die kleinſte,

3) die kleinſte Zahl ſoll um a größer ſein, als $\frac{1}{n}$ der mittelſten Zahl.

Man ſetze die mittelſte Zahl $=nx$, ſo iſt die kleinſte, zufolge der dritten Bedingung, $=x+a$, der Unterſchied beider aber iſt $nx-x-a=(n-1)x-a$. Dieſer Unterſchied iſt, nach der zweiten Bedingung, $\frac{1}{m}$ der größeſten Zahl, alſo iſt die größte Zahl ſelbſt $=m(n-1)x-am$. Der Unterſchied der größeſten und der mittelſten Zahl wird daher $=(mn-m-n)x-am$, dieſer Unterſchied iſt aber, nach der erſten Bedingung, $\frac{1}{p}$ der kleinſten Zahl, folglich die kleinſte Zahl ſelber $=(pmn-pm-pn)x-amp$, und da eben dieſe Zahl auch $=x+a$ war, ſo hat man die Gleichung

$$(pmn-pm-pn)x-amp=x+a$$

folglich wird $x=\frac{(pm+1)a}{pmn-(pm+pn+1)}$.

Da Diophantus die drei Nenner p, m und n ſämmtlich gleich ſetzt, ſo verwandelt ſich dieſe Formel in die einfachere

$$x = \frac{(n^2+1)a}{n^3-(2n^2+1)}.$$

In dem gegebenen Falle iſt $n=3$ und $a=10$, alſo iſt $n^2+1=3\times3+1=10$, und $(n^2+1)a=100$; $n^3=27$, $2n^2+1=19$, $n^3-(2n^2+1)=8$, folglich $x=\frac{100}{8}=12\frac{1}{2}$, wie im Texte.

Man ſetze aber

$$p=4,\ m=6,\ n=5,\ a=12,$$

ſo iſt $pm+1=25$, $(pm+1)a=25.\ 12=300$, $pmn=120$, $pm+pn+1=24+20+1=45$, folglich wird der Nenner $pmn-(pm+pn+1)=120-45=75$, alſo $x=\frac{300}{75}=4$. Nun wird die kleinſte Zahl $x+a=16$, die mittelſte $nx=20$, die größeſte $m(n-1)x-am=24.4-12.6=24$, und dieſe drei Zahlen leiſten ebenfalls, was die Aufgabe vorſchreibt.

Die der Aufgabe beigefügte Bedingung ſagt eigentlich, der Nenner m müſſe ſo beſchaffen ſein, daß, wenn man ihn mit dem Unterſchiede der mittelſten und der kleinſten Zahl, alſo mit $(n-1)x-a$ multiplicirt, die Größe x in dem Produkte öfter enthalten ſei, als in der mittelſten Zahl nx, d. h. $m(n-1)$ ſoll größer als n, alſo auch mn größer als $m+n$ ſein, welches alle Mal geſchieht, wenn man für die eine Zahl wenigſtens 3,

für die andere wenigſtens 2 ſetzt, denn wenn beide Zahlen $=2$ ſind, ſo iſt $mn=m+n$.

Bachet tadelt den Ausdruck dieſer Bedingung, weil man aus demſelben nicht eher über die Möglichkeit der Aufgabe urtheilen könne, als bis man mit der Auflöſung zu Stande ſei; wenn man aber bedenkt, daß πλῆϑος ἀριϑμῶν immer den Coefficienten der unbekannten Größe bezeichnet, ſo ſieht man leicht, daß die von Diophantus aufgeſtellte Bedingung wirklich nichts anderes ſagt, als was er nach Bachets Meinung hätte ſagen ſollen.

Ueber den Grund der aufgeſtellten Bedingung kann man ſich ſehr leicht täuſchen, wenn man dieſelbe nämlich bloß aus den allgemeinen Ausdrücken für die 3 ungleichen Zahlen ableiten will, wie es Diophantus wirklich gethan zu haben ſcheint. Man kann nämlich ſagen, $m(n-1)x-am$ ſoll die größeſte Zahl ſein; iſt nun $m(n-1)x$ gleich oder kleiner als nx, ſo wird, wenn man am abzieht, die größeſte Zahl kleiner werden als die mittelſte. Aber dann wäre die Bedingung offenbar unvollſtändig, und es ließe ſich recht wohl denken, daß $m(n-1)x$ größer als nx, und deſſen ungeachtet der Reſt $m(n-1)x-am$ kleiner als nx ſei; auch wäre dann zu überlegen, daß nx größer als $x+a$ ſein muß, was nicht für jeden Werth von n, x und a zutreffen kann, ſondern nur, wenn x größer als $\frac{a}{n-1}$ iſt.

Die Bedingung gründet ſich aber auf einen anderen Umſtand. Da für x ein poſitiver Werth geſucht wird, ſo muß in der für x gefundenen Formel auch der Nenner einen poſitiven Werth haben, folglich $pmn > pm + pn + 1$, oder wenn man durch p dividirt, $mn > m + n + \frac{1}{p}$ ſein. Hieraus folgt: das Produkt mn muß größer ſein, als die Summe $m+n$, und zwar um mehr als um den Bruch $\frac{1}{p}$; es war aber nicht nöthig, die letztere Beſtimmung mit aufzunehmen, denn da m und n ganze Zahlen ſein ſollen, ſo wird $mn-(m+n)$ immer eine ganze Zahl, alſo mindeſtens $=1$ ſein. Iſt alſo mn überhaupt größer als $m+n$, ſo wird der Ueberſchuß nothwendig größer als $\frac{1}{p}$ ſein.

Um ſich aber zu überzeugen, daß $x+a$ nothwendig die kleinſte, nx die mittelſte, $m(n-1)x-am$ die größte der drei Zahlen werde, wie man auch a und p beſtimmen mag, ſo ſetze man in die obigen Ausdrücke den für x gefundenen Werth, ſo wird

$$\text{I. } x+a = \frac{apn(m-1)}{pmn-(pm+pn+1)}.$$

$$\text{II. } nx = \frac{an(pm+1)}{pmn-(pm+pn+1)}.$$

$$\text{III. } m(n-1)x-am = \frac{amn(p+1)}{pmn-(pm+pm+1)}$$

Da nun alle drei Größen denſelben Nenner haben, ſo iſt bloß zu zeigen, daß der Zähler des erſten Aus-

drucks kleiner ſei, als der Zähler des zweiten, und dieſer wieder kleiner, als der Zähler des dritten. Es iſt aber

$$apn(m-1) = apnm - apn$$
$$an(pm+1) = apnm + an$$
$$amn(p+1) = apnm + amn.$$

Alle drei Zähler haben das gemeinſchaftliche Glied apnm, in dem erſten wird aber von dem gemeinſchaftlichen Gliede das Produkt apn abgezogen, in dem zweiten das Produkt an, in dem dritten das Produkt amn, welches nothwendig größer als an iſt, dazu addirt, folglich iſt in jedem Falle der erſte Zähler der kleinſte, der zweite der mittelſte, der dritte der größte von allen.

Noch iſt zu bemerken, daß a ein Factor für alle drei Größen wird; erhält man alſo Brüche für die geſuchten Zahlen, ſo kann man ſie mit ihrem gemeinſchaftlichen Nenner multipliciren, um ganze Zahlen zu erhalten, denn das iſt eben ſo viel, als hätte man a ſo oft vergrößert, als der Nenner anzeigt. Auch ergiebt ſich daraus noch: wenn man drei Zahlen hat, welche der Aufgabe genügen, ſo kann man ſie mit jeder beliebigen Zahl dividiren oder multipliciren, und dadurch immer neue Zahlen von der verlangten Eigenſchaft finden.

XXIV.

Wenn man die Buchſtaben a, p, m, n in der vorhin angegebenen Bedeutung behält, ſo ſetze man die

kleinſte Zahl $=x+a$, folglich die mittelſte $=nx$. Nun ſoll die größte Zahl die mittelſte um $\frac{1}{p}$ der kleinſten Zahl überſteigen, und wird daher $=nx+\frac{x+a}{p}$. Die mittelſte Zahl ſoll aber die kleinſte um $\frac{1}{m}$ der größeſten Zahl überſteigen, und wird daher $=x+a+\frac{nx}{m}+\frac{x+a}{mp}$. Man hat alſo einen doppelten Ausdruck für die mittelſte Zahl; dieſer giebt die Gleichung

$$nx = x+a+\frac{nx}{m}+\frac{x+a}{mp},$$

woraus wie vorher folgt

$$x = \frac{(pm+1)a}{pmn-(pn+pm+1)}.$$

Die der Aufgabe beigefügte Bedingung ſagt eigentlich: der mte Theil der größeſten Zahl d. i. $\frac{nx}{m}+\frac{x+a}{pm}$ müſſe von der Art ſein, daß, wenn man ihn zu $x+a$ addirt, die unbekannte Größe darin nicht ſo oft vorkomme, als in dem Ausdruck für die mittelſte Zahl nx. Dies ſcheint Diophantus aus folgender Betrachtung gefolgert zu haben. Sowohl nx, als die Summe $\frac{nx}{m}+\frac{x+a}{mp}+x+a$ iſt ein Ausdruck für die mittelſte Zahl; käme nun in dem letzteren Ausdruck x eben ſo oft oder öfter als in nx vor, ſo könnten beide Ausdrücke nicht gleich ſein, weil der letztere außer den unbekannten Größen noch die bekannten Glieder $a+\frac{a}{mp}$ enthält.

Wenn man die Bedingung aber näher zergliedert, ſo iſt ſie einerlei mit der bei der vorigen Aufgabe aufgeſtellten, und läßt ſich gerade ſo wie dieſe begründen. Iſt nämlich

$$\frac{n}{m}x \quad \frac{x}{pm}+x<nx$$

ſo folgt

$$1.\ \frac{n}{m}+\frac{1}{pm}+1<n,$$

$$2.\ n+\frac{1}{p}+m<mn,$$

und dies iſt einerlei mit der Bedingung in der vorigen Aufgabe. Die dort gemachten allgemeinen Bemerkungen gelten alſo auch hier.

XXV.

Um die Auflöſung ganz allgemein zu machen, wollen wir annehmen, daß die erſte Zahl $\frac{1}{m}$, die zweite $\frac{1}{n}$, die dritte $\frac{1}{p}$ ihres Werthes abgeben ſolle.

Man ſetze die erſte Zahl $=mx$, damit ſie ſich ohne Reſt durch m dividiren laſſe, und aus gleichem Grunde ſetze man die zweite Zahl $=an$, wo a eine beliebig gewählte Zahl iſt. Giebt nun die zweite Zahl $\frac{1}{n}$ ihres Werthes d. i. a an die folgende Zahl ab, und erhält dagegen $\frac{1}{m}$ von dem Werth der erſten Zahl, d. i. x, ſo verwandelt ſie ſich zuletzt in $x+(n-1)a$.

Eben dieſen Werth ſoll auch die erſte Zahl erhalten, wenn ſie $\frac{1}{m}$ des eigenen Werthes abgegeben, und dagegen $\frac{1}{p}$ von dem Werthe der dritten Zahl erhalten hat. Wenn ſie aber $\frac{1}{m}$ ihres eigenen Werthes oder x abgiebt, ſo wird ſie $=(m-1)x$, und um den vorgeſchriebenen Werth zu erhalten muß man $(n-1)a-(m-2)x$ hinzulegen. Dieſer Ausdruck muß alſo $\frac{1}{p}$ der dritten Zahl, und die dritte Zahl ſelber $=p(n-1)a-p(m-2)x$ ſein.

Zieht man von der dritten Zahl $\frac{1}{p}$ ihres Werthes oder $(n-1)a-(m-2)x$ ab, ſo wird ſie $=p(n-1)a-(n-1)a-p(m-2)x+(m-2)x$. Kommt zu dieſem Reſte noch $\frac{1}{n}$ der zweiten Zahl oder a hinzu, ſo ſoll auch dieſe Zahl den Werth $x+(n-1)a$ erhalten, und man hat daher folgende Gleichung

$$p(n-1)a-(n-1)a+a-p(m-2)x=x+(n-1)a$$

oder, wenn man die Gleichung gehörig ordnet, und die Glieder zuſammenzieht,

$$(p-2)(n-1)a+a=(p-1)(m-2)x+x$$

und daraus findet man

$$x=\frac{(p-2)(n-1)a+a}{(p-1)(m-2)+1}.$$

Setzt man, wie Diophantus gethan hat, $a=1$, ſo wird

$$x=\frac{(p-2)(n-1)+1}{(p-1)(m-2)+1}.$$

Da m=3, n=4, p=5 ſo wird, $(p-2)(n-1)+1=10$, $(p-1)(m-2)+1=5$, alſo x=2. Der Umſtand, daß man den für x gefundenen Werth noch mit einer beliebigen Zahl a multipliciren darf, iſt in doppelter Hinſicht zu beachten. Denn fände man für x einen Bruch, ſo iſt es erlaubt, den Nenner deſſelben wegzulaſſen, denn dies iſt eben ſo viel, als hätte man die Zahl a dieſem Nenner gleich geſetzt, und Diophantus läßt daher unter ähnlichen Umſtänden, oft ohne es ausdrücklich zu bemerken, den Nenner der gefundenen Zahlen fort. Außerdem geht daraus hervor, daß man für x unzählige Werthe finden könne, und die Aufgabe daher unbeſtimmt ſei, ſie wird aber völlig beſtimmt, ſo bald man die Bedingung hinzufügt, daß die Zahlen zuletzt eine beſtimmte Summe z. B. 10 geben ſollen, oder daß $x+(n-1)a$ einen beſtimmten Werth haben ſoll. Unter dieſer Vorausſetzung erhält man folgende Auflöſung.

Die erſte Zahl ſei =3x; giebt dieſe nun $\frac{1}{3}$ ihres Werthes ab, ſo wird ſie 2x. Nun ſoll ſie aber von der dritten ſo viel erhalten, daß ſie =10 wird, ſie muß alſo 10—2x erhalten. Was aber die dritte Zahl abgiebt, ſoll $\frac{1}{5}$ ihres eigenen Werthes ſein, alſo iſt die dritte Zahl =50—10x.

Wenn die dritte Zahl ein Fünftel ihres Werthes abgiebt, ſo wird ſie = 40—8x; ſie ſoll aber von der zweiten ſo viel erhalten, daß ſie =10 wird, d. i. ſie

muß $8x-30$ erhalten. Was aber die zweite Zahl abgiebt, ſoll ein Viertel ihres Werthes ſein, alſo iſt die zweite Zahl ſelbſt $=32x-120$.

Endlich ſoll auch die zweite Zahl, wenn ſie ein Viertel ihres Werthes abgiebt, und ein Drittel von dem Werthe der erſten Zahl erhält, $=10$ werden. Zieht man von der zweiten Zahl $(32x-120)$ ein Viertel ihres Werthes d. i. $8x-30$ ab, ſo bleibt $24x-90$, und addirt man dazu das Drittel der erſten Zahl oder x, ſo wird ſie $=25x-90$; man hat alſo die Gleichung

$$25x-90=10, \text{ alſo } x=\frac{100}{25}=4.$$

Die erſte Zahl iſt alſo 12, die zweite 8, die dritte 10.

XXVI.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe läßt ſich gerade ſo wie die vorige allgemein vorſtellen. Die allgemeinen Bemerkungen, welche wir bei jener machten, finden auch bei dieſer ihre volle Anwendung.

XXVII.

Um den Schluß, durch welchen Diophantus die zweite und dritte Zahl findet, deutlich einzuſehen, bezeichne man die drei geſuchten Zahlen durch x, y, z. Setzt man nun $y+z=3$, folglich die Summe der drei Zahlen $=x+3$, ſo findet man, daß die erſte Zahl $=x+1$ wird,

ſobald ſie ein Drittel von der Summe y+z erhält, daher muß auch die zweite Zahl y=x+1 werden, wenn ſie von der Summe der beiden übrigen x+z ein Viertel erhält, oder es iſt

$$y+\frac{x+z}{4}=x+1.$$

Multiplicirt man nun beide Seiten mit 4, ſo erhält man

$$4y+x+z=4x+4.$$

Statt 4y+x+z kann man aber auch ſetzen 3y+x+y+z, d. h. man kann dafür das Dreifache der zweiten Zahl und die Summe aller drei Zahlen ſetzen, wie Diophantus dieſe Vertauſchung in Worten ausdrückt. Daher erhält man alſo

$$3y+x+y+z=4x+4.$$

Zieht man nun von der einen Seite x+y+z, und von der anderen x+3, alſo an beiden Seiten Gleiches, nämlich die Summe der drei Zahlen ab, ſo wird

$$3y=3x+1, \text{ und } y=x+\frac{1}{3}.$$

Durch daſſelbe Verfahren findet Diophantus noch einen allgemeinen Ausdruck für die dritte Zahl. Nach der Aufgabe ſoll nämlich

$$z+\frac{x+y}{5}=x+1$$

werden. Man multiplicire mit 5, ſo erhält man

$$5z+x+y=5x+5.$$

Zieht

Zieht man nun an der linken Seite x+y+z, an der rechten x+3 ab, ſo erhält man

$$4z = 4x + 2, \text{ alſo } z = x + \frac{1}{2}.$$

Um die Auflöſung allgemein vorzuſtellen, nehme man an, daß die erſte Zahl $\frac{1}{m}$, die zweite $\frac{1}{n}$, die dritte $\frac{1}{p}$ von der Summe der beiden übrigen erhalten ſolle.

Man ſetze vorläufig die erſte Zahl =x, die zweite =y, die dritte =z, nehme aber an, daß die Summe y+z einer durch m theilbaren Zahl z. B. am gleich ſei, ſo wird die Summe der Zahlen x+am ſein, und die erſte Zahl wird, wenn ſie $\frac{1}{m}$ von der Summe der beiden übrigen erhalten hat, =x+a werden.

Wenn die zweite Zahl $\frac{1}{n}$ von dem Werthe der erſten und dritten erhält, ſo ſoll auch ſie =x+a werden, man hat alſo die Gleichung

$$y + \frac{x+z}{n} = x + a,$$

und, wenn man mit n multiplicirt,

$$ny + x + z = nx + an$$

oder, nach dem von Diophantus angeführten Satze,

$$(n-1)y + x + y + z = nx + an.$$

Nun ziehe man an der linken Seite x+y+z, und an der rechten Seite x+am ab, ſo wird

$$(n-1)y = (n-1)x + (n-m)a$$

folglich $y = x + \frac{n-m}{n-1}a$.

Die dritte Zahl z ſoll $\frac{x+y}{p}$ erhalten, und dadurch $=x+a$ werden. Man hat alſo die Gleichung

$$z+\frac{x+y}{p}=x+a.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit p, ſo wird

$$pz+x+y=px+ap,$$

und, nach dem von Diophantus angeführten Satze,

$$(p-1)z+x+y+z=px+ap,$$

Zieht man wiederum an der linken Seite $x+y+z$, und an der rechten Seite $x+am$ ab, ſo wird

$$(p-1)z=(p-1)x+(p-m)a$$

folglich $z=x+\frac{p-m}{p-1}a.$

Die Summe der drei Zahlen iſt alſo

$$x+x+\frac{n-m}{n-1}a+x+\frac{p-m}{p-1}a=3x+\frac{n-m}{n-1}a+\frac{p-m}{p-1}a.$$

Da eben dieſe Summe auch $x+am$ ſein ſoll, ſo hat man die Gleichung

$$3x+\frac{n-m}{n-1}a+\frac{p-m}{p-2}a=x+am,$$

und daraus findet ſich

$$x=\frac{am}{2}-\frac{n-m}{2(n-1)}a-\frac{p-m}{2(p-1)}a.$$

In unſerem Falle iſt

$$\frac{am}{a}=\frac{3}{2},\ \frac{n-m}{2(n-1)}a=\frac{1}{6},\ \frac{p-m}{2(p-1)}a=\frac{1}{4}.$$

Zieht man die Summe der beiden letzten Stücke $=\frac{5}{12}$ von dem erſten Stücke $\frac{3}{2}=\frac{18}{12}$ ab, ſo wird $x=\frac{13}{12}$, wie bei Diophantus.

Da man die Zahl a ganz beliebig wählen darf, ſo iſt es klar, daß es für x unzählige Werthe giebt, und daß es in jedem Falle erlaubt ſei, den Nenner des für x erhaltenen Bruches $\frac{13}{12}$ wegzuwerfen, denn dies iſt eben ſo viel, als hätte man die Zahl a 12 Mal größer genommen als Anfangs. Uebrigens wird auch dieſe Aufgabe völlig beſtimmt, ſobald man für x+am einen beſtimmten Werth fordert.

XXVIII.

Um das Verfahren allgemein darzuſtellen, nehme man an, daß die erſte Zahl $\frac{1}{m}$, die zweite $\frac{1}{n}$, die dritte $\frac{1}{p}$, die vierte $\frac{1}{r}$, von der Summe der drei übrigen erhalten ſolle.

Man bezeichne die vier Zahlen vorläufig durch x, y, z, v, ſetze aber zugleich $y+z+v=am$, ſo iſt die Summe der vier Zahlen $=x+am$, und die erſte Zahl verwandelt ſich in $x+a$, wenn ſie $\frac{1}{m}$ von der Summe der drei übrigen Zahlen erhalten hat.

Daher iſt auch

$$y + \frac{x+z+v}{n} = x + a,$$

und man findet durch daſſelbe Verfahren, welches in der vorigen Aufgabe angewendet wurde,

$$y = x + \frac{n-m}{n-1} a.$$

$$z = x + \frac{p-m}{p-1} a$$

$$v = x + \frac{r-m}{r-1} a.$$

Die Summe der vier Zahlen iſt alſo

$$4x + \frac{n-m}{n-1} a + \frac{p-m}{p-1} a + \frac{r-m}{r-1} a,$$

und da eben dieſe Summe auch x+am ſein ſoll, ſo hat man die Gleichung

$$4x + \frac{n-m}{n-1} a + \frac{p-m}{p-1} a + \frac{r-m}{r-1} a = x + am$$

und daraus findet man

$$x = \frac{am}{3} - \frac{n-m}{3(n-1)} a - \frac{p-m}{3(p-1)} a - \frac{r-m}{3(r-1)} a.$$

Wenn man die beiden Formeln vergleicht, welche das Verfahren in der vorigen und in dieſer Aufgabe allgemein vorſtellen, ſo ſieht man leicht, daß beide nach einem ſehr einfachen und in die Augen fallenden Geſetze gebildet ſind, und daß ſich das Verfahren auf ſo viele Zahlen ausdehnen läßt, als man immer will. Käme nämlich noch die fünfte Zahl t hinzu, welche

von der Summe der übrigen $\frac{1}{s}$ erhalten ſollte, ſo würde man für y, z und v die vorigen Werthe, für t aber den Werth $x+\frac{s-m}{s-1}a$ finden, und es würde zuletzt

$$x=\frac{am}{4}-\frac{n-m}{4(n-1)}a-\frac{p-m}{4(p-1)}a-\frac{r-m}{4(r-1)}a-\frac{s-m}{4(s-1)}.$$

XXIX.

Diophantus nimmt bei der Auflöſung ſtillſchweigend an, daß 200x das Quadrat, 5x aber die Wurzel dieſes Quadrats ſein ſolle, ungeachtet dies in der Aufgabe ſelber nicht ausdrücklich geſagt iſt. Daher kann man auch den Fall berückſichtigen, daß 5x ein Quadrat, und 200x die Wurzel dieſes Quadrats werden ſoll. Hier wird alſo

$$5x=(200x)^2=40000x^2$$

und es würde $x=\frac{5}{40000}=\frac{1}{8000}$.

Um die Auflöſung allgemein vorzuſtellen, heiße die Zahl deren Produkt ein Quadrat werden ſoll a, diejenige aber, deren Produkt die Wurzel dieſes Quadrates ſein ſoll, heiße b, die geſuchte Zahl heiße wie vorhin x. Nun ſoll das Produkt ax das Quadrat von bx ſein, man hat alſo

$$ax=(bx)^2=b^2x^2,$$

daraus aber findet man $x=\frac{a}{b^2}$.

XXX. — XXXIII.

Die Worte, welche ich hier, wie in der XXXI. und XXXIII. Aufgabe überſetzt habe: dies läßt ſich aber durch ein beſonderes Verfahren bewirken, lauten im Griechiſchen: ἐστὶ δὲ τοῦτο πλασματικὸν. Dies wird von Xylander, welcher den Scholiaſten unrecht verſtand, überſetzt: hoc autem est aliunde effictum. Der Scholiaſt bemerkt nämlich die Bedingung gründe ſich auf den Satz Eukl. II. 5, und Xylander ſcheint alſo ſagen zu wollen: dieſe Bedingung ſei eigentlich aus einem anderen Theile der Mathematik entlehnt, oder einem fremden Satze nachgebildet, was doch weder die Meinung des Verfaſſers noch des Scholiaſten ſein kann.

Bachet, welcher zwar Xylanders aliunde effictum tadelt, ſcheint doch die Worte des Scholiaſten nicht näher geprüft zu haben. Seine Meinung iſt, πλασματικὸν gehe auf die ganze Aufgabe, und ſie werde deßhalb ſo genannt, weil man daraus die ſo genannten zuſammengeſetzten Regeln, oder die Regeln für die Auflöſung vermiſchter quadratiſcher Gleichungen ableiten (plasmare) könne. Dieſe Meinung hat aber Alles wider ſich. Zuerſt muß man bezweifeln, daß daß Adjectivum πλασματικὸν dieſe Bedeutung haben könne, wenigſtens ſpricht weder die Bedeutung von πλάσσω, noch das von Schneider angeführte πλασματικῶς

bei Euſtathius ad Iliad. 1. p. 71, 37 dafür. Was aber Bachets Meinung ganz widerlegt, iſt der Umſtand, daß Diophantus die drei Aufgaben, bei welchen dieſe Bemerkung ſich findet, nicht als vermiſchte, ſondern als reine quadratiſche Gleichungen behandelt, wiewohl ſie bei dem gewöhnlichen Anſatz mit zwei unbekannten Größen auf eine vermiſchte quadratiſche Gleichung führen. Daß die Regeln zur Auflöſung einer ſolchen Gleichung ſonſt nirgend vorgetragen werden, kann jener Meinung auch nicht zur Stütze dienen, denn man muß annehmen, daß ſie in der Einleitung zu einem der ſpäteren Bücher enthalten waren, deren Verluſt wir zu bedauern haben. Der Scholiaſt hat unſtreitig den richtigen Sinn getroffen, wenn er nach Xylanders Ueberſetzung ſagt: hujusmodi conditiones non quosdam numeros habent obnoxios, quosdam secus, sed omnes in universum numeri iis devinciuntur, neque ulli sunt, in quos eae non competant, d. i. was hier zur Möglichkeit der Auflöſung erfordert wird, iſt nicht etwa eine Beſchaffenheit, die nur gewiſſen Zahlen eigenthümlich wäre, wie in den folgenden Büchern zuweilen eine Bedingung ſich auf die eigenthümliche Beſchaffenheit gewiſſer Zahlen gründet, ſondern man kann die Zahlen alle Mal ſo beſtimmen oder bilden (πλάσσειν), daß der Bedingung Genüge geſchieht. Dies ergiebt ſich noch deutlicher, wenn man die Aufgabe allgemein löſ't, und dann die hier ausgeſprochene Bedingung näher betrachtet.

Es ſei die Summe der beiden Zahlen $= s$, ihr Produkt p, den Unterſchied der beiden Zahlen ſetze man $= 2x$, ſo kann man nach einem bekannten Satze (I. 1) die erſte Zahl durch $\frac{1}{2}s + x$, die zweite durch $\frac{1}{2}s - x$ ausdrücken. Dann iſt aber das Produkt beider Zahlen $= \frac{1}{4}s^2 - x^2$, und man erhält die Gleichung

$$\frac{1}{4}s^2 - x^2 = p, \text{ folglich } x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}s^2 - p\right)}.$$

Die Formel zeigt, daß $\frac{1}{4}s^2$ oder das Quadrat der halben Summe größer ſein muß als p, wenn $\sqrt{\left(\frac{1}{4}s^2 - p\right)}$ nicht eine unmögliche Größe werden ſoll, und daß $\frac{1}{4}s^2 - p$ ein Quadrat ſein muß, wenn man für x einen rationalen Werth verlangt. Nun iſt es aber ganz leicht, die Zahlen s und p ſo zu beſtimmen, daß $\frac{1}{4}s^2 - p$ ein Quadrat wird; denn man nehme z. B. p ganz willkührlich, ſo läßt ſich nach den im zweiten Buche vorkommenden Regeln immer ein Werth von s angeben, der ſo beſchaffen iſt, daß die Formel $\frac{1}{4}s^2 - p$ ein Quadrat wird. Man nehme z. B. $\frac{1}{2}s - a$ als Wurzel dieſes Quadrates an, ſo hat man die Gleichung

$$\frac{1}{4}s^2 - p = \frac{1}{4}s^2 - as + a^2,$$

und daraus findet man $s = \frac{a^2+p}{a}$, wo man a ganz willkührlich nehmen kann. Von dem Verfahren, durch welches wir hier die Formel $\frac{1}{4}s^2 - p$ zu einem Quadrat machen, oder eigentlich von der Entſtehung eines Quadrates aus einer nach gewiſſen Regeln gebildeten Wurzel, gebraucht Diophantus faſt immer den Ausdruck πλάσσειν τετράγωνον, und ſo iſt klar, wie er hier ſagen konnte, die angegebene Bedingung ſei ein πλασματικὸν, oder etwas, das διὰ τοῦ πλάσσειν τετράγωνον erreicht werden könne.

Daß es mit der XXXI und XXXIII Aufgabe, in welchen eben dieſer Zuſatz vorkommt, ſich eben ſo verhält, geht aus der allgemeinen Auflöſung dieſer Aufgaben deutlich hervor.

In der XXXI. Aufgabe ſei z. B. die Summe der Zahlen $= s$, die Summe ihrer Quadrate $= S$, den Unterſchied der Zahlen ſetze man wie vorher $= 2x$, ſo iſt die größere der beiden Zahlen $= \frac{1}{2}s + x$, die kleinere $= \frac{1}{2}s - x$, das Quadrat der erſten $= \frac{1}{4}s^2 + sx + x^2$, das Quadrat der letzteren $= \frac{1}{4}s^2 - sx + x^2$, alſo die Summe der Quadrate $= \frac{1}{2}s^2 + 2x^2$. Da nun eben dieſe Summe auch S ſein ſoll, ſo hat man die Gleichung

$$\frac{1}{2}s^2 + 2x^2 = S, \text{ folglich } x = \sqrt{\frac{2S - s^2}{4}}.$$

Dieſe Formel zeigt zuerſt, daß $2S$ oder die doppelte Summe der Quadrate größer ſein muß als s^2, oder als das Quadrat der Summe, weil ſonſt x eine unmögliche Größe wird; ſie zeigt ferner, daß $\frac{2S-s^2}{4}$ ein Quadrat ſein müſſe, wenn man für x einen rationalen Werth verlangt und man ſieht endlich, daß, um dieſer Bedingung zu genügen, man nur den Zähler $2S-s^2$, durch das vorhin angedeutete Verfahren, zu einem Quadrat zu machen hat.

Bei der XVXIII. Aufgabe ſei der Unterſchied der Zahlen $= d$, ihr Produkt $= p$, die Summe der Zahlen ſetze man $= 2x$, alſo die größere Zahl $= x + \frac{1}{2}d$, und die kleinere $= x - \frac{1}{2}d$. **Nun iſt das Produkt beider** $= x^2 - \frac{1}{4}d^2$, und man hat alſo die Gleichung

$$x^2 - \frac{1}{4}d^2 = p, \text{ folglich } x = \sqrt{\left(p + \frac{1}{4}d^2\right)}$$

Man überſieht ſogleich, daß $p + \frac{1}{4}d^2$, folglich auch $4p + d$ ein Quadrat ſein muß, wenn man für x einen rationalen Werth ſucht; die Formel $p + \frac{1}{4}d^2$ oder auch $4p + d^2$ läßt ſich aber immer zu einem Quadrate machen, wenn man p ganz beliebig wählt, und d durch das obige Verfahren beſtimmt.

Es ſcheint, als ob durch dieſe Formel **Bachets** Meinung, als ſolle man aus dieſen Aufgaben die ſo

genannten zuſammengeſetzten Regeln für die Auflöſung vermiſchter quadratiſcher Gleichung ableiten, völlig widerlegt, und die Meinung des Ueberſetzers hinlänglich gerechtfertigt werde.

Man vergleiche noch, was Käſtner im dritten Bande ſeiner Geſchichte der Math. S. 157 ff. über dieſe Stelle geſagt hat. Daß Bachets Erklärung nicht genüge, und daß das πλασματικόν nicht auf die Aufgabe, ſondern auf die ihr beigefügte Bedingung geh', hat Käſtner wohl gefühlt, doch wagt er keine beſtimmtere Erklärung, wie er denn überhaupt den Diophantus ſelbſt nicht mit Aufmerkſamkeit geleſen zu haben ſcheint. Zum Beweiſe kann die von ihm gemachte ganz falſche Bemerkung dienen, Diophantus ſetze für die unbekannte Größe die Zahl Eins, ein Irrthum der aus einer flüchtigen Anſicht der IX. Aufgabe des erſten Buches entſtanden iſt, wo es heißt: τετάχθω ὁ ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑκατέρου ἀρίθμου, ἀριθμὸς εἷς.

XXXII. — XXXXIV.

Die hier folgenden Aufgaben haben überall keine Schwierigkeit, und es wird in jedem Falle ſehr leicht ſein, die Auflöſung, welche Diophantus an einem einzelnen Beiſpiel ausführt, durch allgemeine Zeichen darzuſtellen.

XXXXIII.

Man bezeichne die kleinere der gegebenen Zahlen durch a, die größere durch b, die geſuchte Zahl durch x, ſo ſind die drei Produkte aus der Summe je zweier in die dritte folgende:

1. $(a+x)b = ab + bx$

2. $(b+x)a = ab + ax$

3. $(a+b)x = ax + bx$.

Da nun b der Annahme nach größer als a iſt, ſo iſt das erſte Produkt nothwendig größer als das zweite, und es ſind daher in Rückſicht auf die Größe der drei Produkte noch folgende drei Fälle möglich:

1) $(a+x)b$ iſt das größeſte, $(a+b)x$ das mittelſte $(b+x)a$ das kleinſte der drei Produkte,

2) $(a+x)b$ iſt wiederum das größeſte, $(b+x)a$ das mittelſte, $(a+b)x$ das kleinſte,

3) $(a+b)x$ iſt das größeſte, $(a+x)b$ das mittelſte, $(b+x)a$ das kleinſte der drei Produkte.

Für jeden dieſer drei Fälle kann man die Auflöſung aus dem Satze herleiten, daß, wenn drei Zahlen eine arithmetiſche Reihe bilden, die Summe der beiden äußerſten Glieder ſo groß iſt, als das mittelſte doppelt genommen, wiewohl Diophantus im zweiten Falle die Auflöſung unmittelbar aus der Gleichheit der Unterſchiede ableitet.

Zu dem erſten Falle iſt die Summe der beiden äußerſten Glieder $= (a+b)x + 2ab$, und das mittelſte

Glied doppelt genommen $=2(a+b)x$. Man hat alſo die Gleichung

$$(a+b)x+2ab=2(a+b)x, \text{ und } x=\frac{2ab}{a+b}.$$

In dem zweiten Falle iſt die Summe der äußerſten Glieder $=2bx+ax+ab$, und das mittelſte Glied doppelt genommen $=2ax+2ab$. Man hat alſo die Gleichung

$$2bx+ax+ab=2ax+2ab, \text{ und } x=\frac{ab}{2b-a}.$$

In dem dritten Falle endlich iſt die Summe der äußerſten Glieder $=2ax+bx+ab$, und das mittelſte Glied doppelt genommen $=2bx+2ab$. Man hat alſo die Gleichung

$$2ax+bx+ab=2bx+2ab, \text{ und } x=\frac{ab}{2a-b}.$$

Aus den drei Formeln für x überſieht man, daß der erſte und dritte Fall Statt finden kann, die gegebenen Zahlen mögen beſchaffen ſein, wie ſie wollen, daß der zweite aber nur dann möglich iſt, wenn die größere Zahl kleiner iſt, als das Doppelte der kleineren, weil ſonſt x einen negativen Werth erhält.

Anmerkungen zum zweiten Buche.

I. — V.

Die erſte Aufgabe des zweiten Buches unterſcheidet ſich von der vier und dreißigſten Aufgabe des erſten Buches nur dadurch, daß hier diejenige Bedingung wegfällt, nach welcher die beiden geſuchten Zahlen ein vorgeſchriebenes Verhältniß haben ſollen. Eben dieſe Beziehung findet auch zwiſchen der zweiten Aufgabe des zweiten und der ſieben und dreißigſten Aufgabe des erſten Buches, ferner zwiſchen der vierten und fünften Aufgabe des zweiten und der XXXV. und XXXVI. Aufgabe des erſten Buches Statt. Da Diophantus aber ſtatt des vorgeſchriebenen Verhältniſſes ein willkührlich gewähltes nehmen muß, um beide Zahlen auszudrücken, und bei der dritten Aufgabe ausdrücklich bemerkt, man könne den beiden geſuchten Zahlen jedes vorgeſchriebene Verhältniß geben, ſo fällt aller weſentliche Unterſchied zwiſchen dieſen und den bezeichneten Aufgaben des erſten Buches ganz weg, und man darf

nicht zweifeln, daß dieſe Aufgaben Ueberarbeitungen von ſpäterer Hand ſind, dergleichen ſich im Apollonius mehre nachweiſen laſſen, und daß der Herausgeber der Diophantiſchen Aufgaben ſie mit Unrecht an dieſen Platz geſtellt hat.

VI.

Die Aufgabe konnte einfacher ausgedrückt werden: Es iſt der Unterſchied zweier Zahlen, und der Unterſchied ihrer Quadrate gegeben, man ſoll dieſe Zahlen ſelber finden. Nennt man den Unterſchied der Zahlen d, den Unterſchied ihrer Quadrate D, ſo kann man die kleinere Zahl durch x, die größere durch x+d, folglich den Unterſchied ihrer Quadrate durch $2dx + d^2$ bezeichnen. Dies giebt die Gleichung

$$2dx + d^2 = D, \text{ und } x = \frac{D - d^2}{2d},$$

woraus ſich der Grund der hinzugefügten Einſchränkung von ſelbſt ergiebt.

VII.

Ueber den Sinn der Aufgabe, welche im Griechiſchen leicht falſch verſtanden werden kann, beziehe ich mich bloß auf die Bemerkung zu I, 3. Setzt man die gegebene Zahl 10 = a, den Exponenten 3 = n, und den Unterſchied der Zahlen, der an ſich willkührlich iſt, = d, ſo verlangt die Aufgabe, daß der Unterſchied zwiſchen

den Quadraten beider Zahlen $= nd + a$ ſein ſolle. Nennt man nun die kleinere Zahl x, die größere $x + d$, folglich den Unterſchied ihrer Quadrate $2dx + d^2$, ſo hat man die Gleichung

$$2dx + d^2 = nd + a, \text{ und } x = \frac{(nd + a) - d^2}{2d}.$$

Da man d beliebig wählen darf, ſo giebt es unendlich viele Werthe für x; dagegen erhält x nur einen beſtimmten Werth, wenn d eine vorgeſchriebene Zahl iſt. Die Formel zeigt übrigens, daß d^2 kleiner ſein muß, als $nd + a$, wenn man für x einen poſitiven Werth verlangt.

VIII. IX.

Wenn man das gegebene Quadrat durch a^2 bezeichnet, und x^2 als das eine der geſuchten Quadrate annimmt, ſo kommt es darauf an, für x einen Werth von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß die Formel $a^2 - x^2$ ein Quadrat wird. Dies läßt ſich aber in jedem Falle leicht bewirken, denn man nehme $nx - a$ als Wurzel der gegebenen Formel an, ſo hat man die Gleichung

$$n^2x^2 - 2anx + a^2 = a^2 - x^2, \text{ und } x = \frac{2an}{n^2 + 1}.$$

Da man hier n ganz beliebig wählen darf, ſo giebt es unzählige Werthe von x, welche der Aufgabe genügen. Es ſei z. B. $a^2 = 36$, $n = 4$, ſo wird $2an = 48$, $n^2 + 1 = 17$, folglich $x = \frac{48}{17}$. Dieſe Zahl iſt alſo die

Wur-

Wurzel des einen Quadrates, und das Quadrat ſelbſt $\frac{2304}{289}$, das andre Quadrat ſoll $= a^2 - x^2$ ſein, man findet es alſo, wenn man $\frac{2304}{289}$ von 36 abzieht $= \frac{8100}{289}$.

Hätte man dagegen $n = 2$ geſetzt, ſo wäre $2an = 24$, $n^2 + 1 = 5$, alſo $x = \frac{24}{5}$, woraus man das erſte Quadrat $= \frac{576}{25}$, das andere $= \frac{900}{25}$ findet.

Die zweite Auflöſung in IX. beruht auf denſelben Gründen, wie die erſte, und führt, wenn man ſie allgemein ausdrückt, auf die nämliche Formel. Denn wenn man die Wurzel des einen Quadrats $= x$, die des andern $= nx - a$ ſetzt, ſo erhält man die Gleichung

$$x^2 + n^2x^2 - 2anx + a^2 = a^2, \text{ alſo } x = \frac{2an}{n^2 + 1}.$$

Aus dem Verfahren ergiebt ſich aber, daß ein Ausdruck von der Form $n^2x^2 \pm a$ ſich in jedem Falle zu einem Quadrat machen laſſe.

X.

Wenn eine Zahl A die Summe zweier Quadrate, oder wenn $A = a^2 + b^2$ iſt, ſo kann man dieſe Zahl auf unendlich viele Arten noch in zwei andere Quadrate theilen, indem man die eine Wurzel $= x \pm a$, die andere $= nx \pm b$ ſetzt, wobei nur das zu bemerken iſt, daß man zwar in beiden Wurzeln das Zeichen —, aber nicht

in beiden Wurzeln das Zeichen + ſetzen darf. Es ſei nämlich die eine der geſuchten Wurzeln $=x+a$, die andere $=nx-b$, ſo iſt die Summe der beiden geſuchten Quadrate $(n^2+1)x^2+(2a-2bn)x+a^2+b^2$, und da eben dieſe Summe auch $=A$ ſein muß, ſo hat man die Gleichung

$$(n^2+1)x^2+(2a-2bn)x+a^2+b^2=A.$$

Zieht man nun an der linken Seite a^2+b^2, und an der rechten Seite A, alſo an beiden Seiten Gleiches ab, ſo wird

$$(n^2+1)x^2+(2a-2bn)x=0, \text{ folglich } x=\frac{2bn-2a}{n^2+1},$$

und wenn man dieſen für x gefundenen Werth in die Wurzeln $x+a$ und $nx-b$ ſetzt, ſo erhält man zwei Zahlen, deren Quadrate der gegebenen Zahl A gleich ſind. Nimmt man dagegen $x-a$ als die erſte, und $nx+b$ als die zweite geſuchte Wurzel an, ſo erhält man die Gleichung

$$(n^2+1)x^2+(2bn-2a)x+a^2+b^2=A$$

und daraus findet man $x=\frac{2a-2bn}{n^2+1}$.

In beiden Fällen darf man n zwar willführlich wählen, nur muß bn in dem erſteren Falle größer, und im letzteren Falle kleiner als a ſein, wenn man für x einen poſitiven Werth verlangt. Dieſer Unbequemlichkeit geht man ganz aus dem Wege, wenn man die erſte Wurzel $=x-a$, die zweite $=nx-b$ ſetzt, denn dadurch

erhält man $x = \frac{2a + 2bn}{n^2 + 1}$, und man kann in dieſem Falle die Zahl n vollkommen willkührlich wählen, und A ſo oft als es verlangt wird in zwei andere Quadrate theilen. Wollte man aber die eine Wurzel $= x + a$, die andere $= nx + b$ ſetzen, ſo würde $x = -\frac{2a + 2bn}{n^2 + 1}$, alſo in jedem Falle negativ werden.

Da man nach II. 9. jedes der gefundenen Quadrate immer von Neuem in zwei Quadrate theilen kann, ſo läßt ſich jede Zahl von der Form $a^2 + b^2$ in ſo viel Quadrate theilen, als es verlangt wird. Iſt aber A die Summe dreier Quadrate, oder iſt $A = a^2 + b^2 + c^2$, ſo kann man ſogleich drei Wurzeln von der Form $x \pm a$, $nx \pm b$, $mx \pm c$ annehmen, wobei in Rückſicht der Vorzeichen, und in Rückſicht der Zahl n ganz ähnliche Einſchränkungen zu beobachten ſind. Setzt man die erſte Wurzel $= x - a$, die zweite $nx - b$, die dritte $mx - c$, ſo iſt die Summe der geſuchten Quadrate

$$(m^2 + n^2 + 1)x^2 - (2cm + 2bn + 2a)x + a^2 + b^2 + c^2,$$

und da eben dieſe Summe auch $= A$ ſein ſoll, ſo hat man die Gleichung

$$(m^2 + n^2 + 1)x^2 - (2cm + 2bn + 2a)x + a^2 + b^2 + c^2 = A,$$

und hieraus findet man

$$x = \frac{2(cm + bn + a)}{m^2 + n^2 + 1}.$$

Man nehme z. B. die Zahl 14, welche die Summe der drei Quadrate 1, 4 und 9 iſt, und ſetze $m=2$, und $n=3$, ſo iſt

$$2(cm+bn+a) = 2(6+6+1) = 26,$$
$$m^2+n^2+1 = 4+9+1 = 14,$$

folglich wird $x = \frac{13}{7}$; die erſte Wurzel $x-a$ iſt alſo $\frac{6}{7}$, die zweite $nx-b = \frac{25}{7}$, die dritte $mx-c = \frac{5}{7}$, die Summe der drei Quadrate aber iſt $\frac{686}{49} = 14$.

XI.

Wenn der vorgeſchriebene Unterſchied der beiden geſuchten Quadrate allgemein durch d bezeichnet, und die eine der geſuchten Wurzeln $=x$, die andere $=x+a$ geſetzt wird, ſo iſt der Unterſchied der beiden Quadrate $=2ax+a^2$, da ſich x^2 gegen x^2 aufhebt. Das Letztere will Diophantus durch die Worte anzeigen ἑνὸς εἴδους ἑνὶ εἴδει ἴσου καταλειπομένου u. ſ. w. was nichts anderes ſagen will, als bei dem angegebenen Verfahren erhalte man eine Gleichung zwiſchen zwei einfachen Ausdrücken. Man hat nämlich die Gleichung

$$2ax+a^2 = d, \text{ folglich } x = \frac{d-a^2}{2a}.$$

Dieſe Formel zeigt, daß man a zwar willkührlich wählen, alſo für x unzählige Werthe angeben kann, daß aber a^2 alle Mal kleiner als d ſein müſſe, wonach der

etwas unbeſtimmte Ausdruck im Diophantus, a^2 dürfe nicht größer als d ſein, zu berichtigen iſt, denn man ſieht leicht, daß $x = 0$ wird, ſo bald $a^2 = d$ iſt. Dieſen Fall berückſichtigt Diophantus aber nicht, weil ſich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat $= 60$ iſt, und der Verf. würde dieſe Bemerkung ſogar für überflüſſig gehalten haben, wenn nicht Bachet den von Diophantus gebrauchten Ausdruck als ungenau getadelt hätte.

Eine beinahe noch einfachere Aufläſung dieſer Aufgabe findet man vermittelſt des Verfahrens, von welchem in der folgenden Anmerkung näher die Rede ſein wird. Man zerfälle nämlich die gegebene Differenz in zwei Factoren z. B. 50×2. Die halbe Summe dieſer Factoren, d. i. 26 ſehe man als die Wurzel des größeren, die halbe Differenz der Factoren oder 24 als die Wurzel des kleineren Quadrats an, ſo erhält man die Quadrate 676 und 576, deren Differenz die gegebene Zahl 100 iſt.

Den Beweis dieſer Regel kann man auf mancherlei Art, unter anderen auch aus dem Satz Euklid. II, 5 ableiten, welcher im Grunde einerlei iſt mit dem arithmetiſchen Satze, daß die Differenz zweier Quadrate ſich alle Mal in zwei Factoren zerfällen laſſe, von welchen der eine die Summe, der andere aber die Differenz der beiden Wurzeln iſt. Man bezeichne alſo die gegebene Differenz allgemein durch d, das größere der beiden Quadrate durch x^2, das kleinere durch z^2, ſo hat man

$$d = x^2 - z^2 = (x + z) \times (x - z).$$

Es kommt alſo darauf an, daß man d in zwei Factoren zerfälle, und den größeren $=x+z$, den kleineren $=x-z$ ſetze. Iſt nun $d=ab$, ſo ſetze man

$$a=x+z, \text{ und } b=x-z.$$

Nun wird nach einem bekannten Satze

$$\frac{a+b}{2}=x \text{ und } \frac{a-b}{2}=z,$$

folglich

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=x^2, \text{ und } \left(\frac{a-b}{2}\right)^2=z^2.$$

Noch anſchaulicher wird die Richtigkeit der gegebenen Regel durch folgende Betrachtung. Wenn $d=a.b$, ſo iſt die halbe Summe der Factoren $\frac{a+b}{2}$, und das Quadrat davon $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$, die halbe Differenz der Factoren $\frac{a-b}{2}$, und das Quadrat davon $\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$; zieht man das letztere Quadrat von dem erſteren ab, ſo erhält man $\frac{4ab}{4}=ab=d$, d. h. man findet durch das angegebene Verfahren zwei Quadrate, welche die vorgeſchriebene Differenz d haben.

Bei der Anwendung dieſer Regel auf die vorliegende Aufgabe iſt es an ſich ganz willkührlich, auf welche Art man die gegebenen Factoren zerfällt, wenn indeß die geſuchten Quadrate ganze Zahlen ſein ſollen, ſo iſt erforderlich, daß a und b ganze Zahlen, und beide

entweder zugleich gerade, oder beide zugleich ungerade Zahlen ſind, denn nur in dieſem Falle wird $\frac{a+b}{2}$ eine ganze Zahl ſein.

XII.

Wir wollen hier zuerſt die zweite Auflöſung allgemein vorſtellen. Es ſind die Zahlen a und b gegeben, man ſoll für x einen Werth von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſowohl $x+a$ als $x+b$ ein Quadrat wird.

Die Zahl z^2-a hat gewiß die Eigenſchaft, daß, wenn man a dazu addirt, die Summe ein Quadrat wird, und z^2-a läßt ſich ohne alle Schwierigkeit finden, indem man a von einem beliebigen Quadrate abzieht. Nun ſoll aber auch z^2-a+b ein Quadrat werden, und dies läßt ſich durch das Verfahren II. 8. alle Mal bewirken. Man ſehe nämlich $z-c$ als die Wurzel der obigen Formel an, ſo hat man die Gleichung

$$z^2-a+b=z^2-2cz+c^2,$$

und hieraus findet ſich

$$z=\frac{c^2+a-b}{2c}=\frac{c^2-(b-a)}{2c}.$$

In unſerem Falle iſt $a=2$, $b=3$, $c=4$, alſo $z=\frac{16+2-3}{8}=\frac{15}{8}$. Nimmt man nun $x=z^2-a$, ſo wird $x=\frac{225}{64}-2=\frac{97}{64}$, und nun iſt $x+a=\frac{225}{64}$, $x+b=\frac{289}{64}$, alſo beide Ausdrücke ſind jetzt Quadrate.

Bei dieſem Verfahren darf zwar die Zahl c beliebig gewählt werden, aber in jedem Falle ſo, daß c^2 größer als $b-a$, und z^2 größer als a wird, weil man ſonſt für die Zahl z^2-a einen negativen Werth erhält. Dies Letztere iſt ganz offenbar der Sinn der Worte ὥστε τὴν τῆς δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προεκτεθειμένας τῆς λείψεως μονάδας, denn Diophantus ſelbſt bemerkt, daß αἱ τῆς λείψεως μονάδες eben die Zahl $-a$ in der durch z^2-a bezeichneten Zahl ſind, und daß ὑπόστασις der in allgemeinen Zeichen ausgedrückte Werth einer Größe, alſo hier $\left(\frac{c^2+a-b}{2c}\right)^2$ ſei, iſt ſchon früher bemerkt worden.

Wie man c ſo beſtimmen könne, daß z^2 größer als a wird, übergeht Diophantus hier ganz, weil dazu die Auflöſung einer vermiſchten quadratiſchen Gleichung erforderlich iſt, welche vermüthlich erſt in einem der ſpäteren Bücher vorgetragen wurde. In der Folge, beſonders im fünften Buche, wird dies Verfahren mehrmals angewendet werden, und wir verſchieben bis dahin die umſtändliche Erläuterung deſſelben. Hier mag es hinreichen ein Verfahren anzugeben, vermittelſt deſſen man der hier berührten Schwierigkeit ganz aus dem Wege geht.

Man mache das Quadrat von $x+2$, wobei die Zahl 2 ſo gewählt werden muß, daß ihr Quadrat größer iſt, als die größere der beiden gegebenen Zahlen, alſo hier größer als 3. Von dem dadurch erhaltenen Quadrat x^2+4x+4 ziehe man die größere der gegebenen Zahlen

alſo 3 ab, und ſehe den Reſt x^2+4x+1 als die geſuchte Zahl an. Dieſer Reſt hat nun gewiß die Eigenſchaft, daß er zu der Zahl 3 addirt, ein Quadrat giebt; es ſoll aber auch die Summe dieſer und der kleineren gegebenen Zahl 2, alſo x^2+4x+3 ein Quadrat ſein. Als Wurzel dieſer Formel ſehe man $x-3$ an, wobei die Zahl 3 ſo zu wählen iſt, daß ihr Quadrat größer, als das dritte Glied der obigen Formel, alſo größer als 3 wird. Dies giebt die Gleichung

$$x^2+4x+3=x^2-6x+9, \text{ und } x=\frac{3}{5}.$$

Die Zahl, die man zu beiden gegebenen Zahlen addiren muß, war allgemein ausgedrückt $=x^2+4x+1$, alſo in wirklichen Zahlen $=\frac{9}{25}+\frac{60}{25}+\frac{25}{25}=\frac{94}{25}$. Addirt man dazu $2=\frac{50}{25}$, ſo erhält man $\frac{144}{25}$, und addirt man dazu $3=\frac{75}{25}$, ſo erhält man $\frac{169}{25}$, alſo wird die Summe in beiden Formeln ein Quadrat, und die gefundene Zahl leiſtet was die Aufgabe vorſchreibt.

Bei dem bisher beſchriebenen Verfahren kommt es nur darauf an die Formel z^2-a+b zu einem Quadrat zu machen; bei dem Verfahren aber, welches Diophantus zuerſt entwickelt, ſoll man unmittelbar einen Werth für x beſtimmen, der ſo beſchaffen iſt, daß ſowohl $x+a$ als $x+b$ ein Quadrat wird. Wenn man aber den Werth einer veränderlichen Größe ſo beſtimmen ſoll, daß dadurch zwei Formeln zugleich Quadrate werden, ſo

nennt Diophantus ſo wohl die Aufgabe ſelbſt als das Verfahren der Auflöſung διπλοϊσότης oder doppelte Gleichung.

Man ſetze nämlich

$$1.\ x + a = y^2.$$

$$2.\ x + b = z^2.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der erſten ab, ſo erhält man

$$a - b = y^2 - z^2,$$

und es kommt alſo bei der Auflöſung zunächſt darauf an, zwei Quadrate zu finden, deren Differenz $= a - b$ iſt. Wie dies geſchehen könne, iſt in der Anmerkung zu der vorigen Aufgabe gezeigt, und es ergiebt ſich hieraus für die Auflöſung der doppelten Gleichung im Allgemeinen folgende Regel. Man ſuche den Unterſchied der beiden gegebenen Formeln, welche man zu Quadraten machen ſoll, zerfälle dieſen Unterſchied in zwei Factoren, und erhebe darauf die halbe Summe oder die halbe Differenz dieſer beiden Factoren ins Quadrat; endlich ſetze man entweder das Quadrat der halben Summe der größeren, oder das Quadrat der halben Differenz der kleineren Formel gleich, ſo erhält man in beiden Fällen denſelben Werth für x. Iſt nämlich y^2 das Quadrat der halben Summe, und z^2 das Quadrat der halben Differenz, ſo folgt aus der obigen Gleichung

$$1.\ x = y^2 - a \text{ und } 2.\ x = z^2 - b.$$

Daß man auf dieſem Wege zwei Quadrate erhalte, welche um die Größe $a - b$ verſchieden ſind, iſt in der

Anmerkung zur vorigen Aufgabe bereits gezeigt, daß man aber aus beiden Gleichungen denſelben Werth für x erhält, läßt ſich leicht überſehen. Denn da nach dem Anſatz

$$a - b = y^2 - z^2,$$

ſo iſt auch

$$y^2 - a = z^2 - b,$$

alſo ſind beide für x berechnete Werthe einander gleich.

Bei der Anwendung dieſer Regel auf die vorliegende Aufgabe iſt aber die Zerfällung des Unterſchiedes beider Formeln nicht willkührlich, wie in der vorhergehenden, ſondern es kommt dabei ſehr auf die Beſchaffenheit der gegebenen Formel an, und wir wollen daher die wichtigſten Fälle, in welchen ſich die doppelte Gleichung anwenden läßt, hier näher entwickeln.

1) Der einfachſte Fall iſt unſtreitig der vorliegende, wo die eine Formel die Form $nx+a$, die andere die ähnliche Form $mx+b$ hat, und hier iſt bei der Zerfällung der Factoren nur das Eine zu beobachten, daß das Quadrat der halben Summe größer als a, das Quadrat der halben Differenz größer als b ſein muß. In dem gegenwärtigen Falle konnte die Differenz $a-b=1$ zwar auf unendlich viele Arten zerfällt werden, und man würde alle Mal zwei um $a-b$ oder um 1 verſchiedene Quadrate erhalten haben, aber zur Auflöſung dieſer doppelten Gleichung ſind nur diejenigen Factoren brauchbar, welche die oben angegebene Eigenſchaft haben. Daher konn-

man erreicht, wenn man diejenige Formel in welchen das kleinere Quadrat vorkommt, durch den Quotienten $\frac{64}{16}=4$ multiplicirt; denn da dieſer Quotient nothwendig ein Quadrat iſt, ſo iſt es einerlei ob man die gegebene, oder die durch Multiplication entſtandene Formel zu einem Quadrate macht. Durch die Multiplication mit 4 verwandelt ſich aber die erſte Formel in dieſe $=4x^2-32x+64$. Zieht man alſo die zweite Formel davon ab, ſo erhält man die Differenz x^2+16x, und dieſe muß ſo zerfällt werden, daß in der halben Summe der Factoren $\sqrt{64}$ alſo in der ganzen Summe $2\sqrt{64}$ vorkommt. Man ſetze alſo $x^2+16x=x\times(x+16)$ ſo wird dieſe Bedingung erfüllt, die halbe Summe der Factoren wird $=x+8$, und man hat die Gleichung

$$4x^2-32x+64=x^2+16x+64.$$

Man findet hier alſo $x=16$ und überſieht leicht, daß die Auflöſung nur dadurch möglich wird, daß an beiden Seiten der Gleichung die Quadrate 64 ſich gegen einander heben, daher ſowohl die Vorbereitung der Formel als die vorgeſchriebene Zerfällung zur Auflöſung weſentlich nothwendig waren. Da die Auflöſung der doppelten Gleichung ein ſo weſentlicher Theil der Diophantiſchen Analyſis iſt, ſo wird es ſehr zweckmäßig ſein, ſich in der Auflöſung ähnlicher Beiſpiele zu üben, dergleichen man nach den obigen Muſtern leicht bilden kann. Man habe z. B. die beiden Formeln $8x+4$ und $6x+4$, ſo iſt die Dif-

renz 2x, dieſe zerfälle man aus dem bei 3. angegebenen Grunde in die Factoren $\frac{1}{2}x$ und 4, ſo iſt die halbe Summe der Factoren $\frac{1}{4}x+2$, und die halbe Differenz $\frac{1}{4}x-2$, und dies giebt die beiden Gleichungen

$$1.\ 8x+4=\frac{1}{16}x^2+x+4.$$

$$2.\ 6x+4=\frac{1}{16}x^2-x+4.$$

Aus beiden findet man $x=112$, und die erſte Formel $8x+4$ wird $=900$, die zweite $6x+4=676$.

XIII.

Dieſe Auflöſung iſt der zweiten in der vorigen Aufgabe nachgebildet. Wenn man nämlich $a-x$ und $b-x$ zu einem Quadrat machen ſoll, ſo nehme man $x=a-z^2$, ſo iſt durch den Anſatz bereits eine von den Bedingungen der Aufgabe erreicht; es kommt alſo nur noch darauf an, daß auch $b-(a-z^2)=z^2+b-a$ ein Quadrat ſei. Man ſehe $z-c$ als Wurzel dieſer Formel an, ſo erhält man

$$z^2+b-a=z^2-2cz+c^2$$

und $x=\frac{c^2+a-b}{2c}=\frac{c^2-(b-a)}{2c}$.

Die hier gefundene Formel unterſcheidet ſich von der in XII. gefundenen nur durch das Vorzeichen, und zeigt, daß c ganz willkührlich gewählt werden kann, wenn nur c^2 größer als $b-a$ iſt. Eine zweite Bedin-

gung, welche man der Aufgabe beifügen muß, iſt dieſe, daß z^2 kleiner ſein muß als a, weil ſonſt x einen negativen Werth erhält.

Uebrigens fällt es in die Augen, daß dieſe Aufgabe auch vermittelſt der doppelten Gleichung aufgelöſ't werden kann.

Denn man ſetze

$$b - x = y^2 ; \; a - x = z^2,$$

ſo erhält man durch Subtraction

$$b - a = y^2 - z^2,$$

und es kommt nur darauf an, b—a ſo zu zerfällen, daß das Quadrat von der halben Summe der Factoren kleiner als b, und das Quadrat von der halben Differenz der Factoren kleiner als a wird. In unſerem Falle iſt $b = 21$, $a = 9$, folglich $b - a = 12 = 2 \times 6$; alſo die halbe Summe der Factoren 4, und die halbe Differenz derſelben 2. Setzt man nun $4^2 = y^2$, und $2^2 = z^2$, ſo verwandeln ſich die obigen Gleichungen in folgende

1. $21 - x = 16$ folglich $x = 5$.

2. $9 - x = 4$ folglich $x = 5$.

XIV.

Auch dieſe Aufgabe unterſcheidet ſich von den beiden vorigen nur durch die Vorzeichen. Behalten die Buchſtaben a, b, c und z ihre vorige Bedeutung, ſo findet man

$$z = \frac{c^2 + (b - a)}{2c}.$$

Die Auflöſung vermittelſt der doppelten Gleichung iſt nur angedeutet, da für Fälle dieſer Art das Verfahren hinreichend erläutert iſt. Der Unterſchied der beiden Formeln x—6 und x—7 iſt 1, und dieſen zerfällt Diophantus in die Factoren 2 und $\frac{1}{2}$, ſo daß die halbe Summe der Factoren $\frac{5}{4}$, die halbe Differenz $\frac{3}{4}$ wird. Dies giebt die beiden Gleichungen

$$x-6=\frac{25}{16}, \text{ und } x-7=\frac{9}{16}.$$

Hieraus ergiebt ſich $x=\frac{121}{16}$, alſo $x-6=\frac{25}{16}$, und $x-7=\frac{9}{16}$.

XV.

Wenn die gegebene Zahl a heißt, ſo nehme man zwei beliebige Zahlen b und c, von der Beſchaffenheit daß b^2+c^2 kleiner als a ſei. Man mache hierauf

$$(x+b)^2 = x^2+2bx+b^2,$$
$$(x+c)^2 = x^2+2cx+c^2,$$

und nehme an, x^2 ſei dasjenige Quadrat, welches man zu den beiden geſuchten Stücken addiren muß, $(x+b)^2$ und $(x+c)^2$ aber die beiden Quadrate, welche entſtehen, wenn man x^2 zu den Stücken der gegebenen Zahl addirt hat. Daher ſind die geſuchten Stücke ſelbſt

2bx+b²

$2bx+b^2$ und $2cx+c^2$, und da beide zuſammen $=a$ ſein ſollen, ſo hat man die Gleichung

$$2bx+2cx+b^2+c^2=a,$$

und daraus $x=\frac{a-(b^2+c^2)}{2(b+c)}$.

Aus der Formel ſieht man, daß b und c ganz beliebig gewählt werden können, wenn nur b^2+c^2 kleiner als die gegebene Zahl a bleibt.

XVI.

Die zu theilende Zahl heiße a, die Wurzel des geſuchten Quadrates ſei $x+b$, das Quadrat ſelbſt alſo $x^2+2bx+b^2$, wobei man b zwar willkührlich, jedoch ſo wählen muß, daß b^2 kleiner als a wird. Zieht man von dieſem Quadrate $2bx+b^2$ ab, ſo iſt der Reſt x^2, zieht man aber $(2b-2)x+(b^2-1)$ ab, ſo bleibt x^2+2x+1, und beide Reſte ſind alſo Quadrate. Wenn man alſo das eine Stück $=2bx+b^2$, das andere $=(2b-2)x+(b^2-1)$ ſetzt, ſo werden durch dieſen Anſatz beide Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und es kommt nur darauf an, x ſo zu beſtimmen, daß beide Stücke der gegebenen Zahl gleich werden.

Man ſetze alſo die Summe der Stücke $=a$, ſo hat man die Gleichung

$$(4b-2)x+2b^2-1=a,$$

folglich $x=\frac{a+1-2b^2}{4b-2}$,

Die Einſchränkung, welche Diophantus für die Wahl der Wurzel b vorſchreibt, wird durch die Formel nicht gerechtfertigt, und müßte vielmehr ſo ausgedrückt werden: die Zahl b muß ſo gewählt werden, daß ihr doppeltes Quadrat kleiner iſt, als die um 1 vergrößerte Zahl, welche man theilen ſoll. Indeß iſt die gegebene Formel nicht ganz allgemein, da ſie zwiſchen den beiden geſuchten Stücken ein beſtimmtes Verhältniß vorausſetzt, und die Bedingung kann nur dann als nothwendig angeſehen werden, wenn man annimmt, daß das eine durch Subtraction entſtandene Quadrat $=x^2+2x+1$ werden ſolle. Man könnte indeß das zweite Stück der Zahl a dadurch beſtimmen, daß man irgend ein Quadrat von der Form $x \pm c$ bildet, welches kleiner als $(x+b)^2$ iſt, dieſes von $x^2+2bx+b^2$ abzieht, und den Reſt für das zweite Stück annimmt.

Daß die Bedingung, wie ſie Diophantus ausdrückt, nicht hinreiche, um negative Werthe von x zu vermeiden, läßt ſich leicht durch ein Beiſpiel darthun. Man ſetze z. B. $x+4$ für die Wurzel des geſuchten Quadrats, das Quadrat alſo $=x^2+8x+16$, ſo iſt die von Diophantus vorgeſchriebene Bedingung erfüllt. Nun ſetze man das eine der geſuchten Stücke $=8x+16$, das andere $=6x+15$, ſo wird der Reſt $=x^2+2x+1$, alſo ebenfalls ein Quadrat. Da die beiden Stücke $=20$ ſein müſſen, ſo hat man die Gleichung

$$14x+31=20, \text{ alſo } x=-\frac{11}{14}.$$

XVII.

Die gegebene Quadratzahl ſei $= a^2$, der Exponent des vorgeſchriebenen Verhältniſſes $= n$. Nun ſetze man die kleinere Zahl $= (x+a)^2 - a^2 = x^2 + 2ax$, ſo wird die eine Bedingung der Aufgabe ſchon durch den bloßen Anſatz erreicht, und es iſt nur noch erforderlich, daß auch das Produkt der kleineren Zahl und des Exponenten n, d. i. $nx^2 + 2anx$ ein Quadrat werde, wenn man a^2 dazu addirt. Man nehme alſo $mx - a$ als die Wurzel dieſer Summe an, ſo hat man

$$m^2 x^2 - 2amx + a^2 = nx^2 + 2anx + a^2.$$

Aus dieſer Gleichung folgt aber nach einigen leichten Veränderungen

$$x = \frac{2a(n+m)}{m^2 - n}.$$

Aus der Formel ſieht man, daß die an ſich beliebige Zahl m doch ſo gewählt werden muß, daß ihr Quadrat größer als der Exponent des vorgeſchriebenen Verhältniſſes wird.

XVIII.

Dieſe Aufgabe unterſcheidet ſich von der XXIII. Aufgabe des erſten Buches nur dadurch, daß jede der geſuchten Zahlen außer einem aliquoten Theile ihres Werthes noch eine beſtimmte Zahl an die nächſtfolgende abgeben ſolle, es ſcheint daher, als ob ſie durch ein Verſehen des Sammlers an einen unrechten Ort geſtellt worden iſt.

Die allgemeinen Bemerkungen zu I. 25. wird man ſehr leicht auf dieſe Aufgabe anwenden können.

XIX.

Man wird leicht bemerken, daß wir in dieſem Satze bloß eine etwas veränderte Auflöſung der vorigen Aufgabe haben, dergleichen Diophantus öfters zu geben pflegt. Unſtreitig liegt hierbei ein Verſehen des Anordners oder vielleicht bloß des Abſchreibers der Diophantiſchen Schrift zum Grunde, der zu der XIX. Aufgabe eine Auflöſung abſchrieb, welche bloß die Ueberſchrift ἀλλῶς haben ſollte, und dagegen die zu der Aufgabe gehörige Auflöſung ganz wegließ. Um hierauf aufmerkſam zu machen, habe ich ſowohl den Satz als die ἔκθεσις deſſelben mit einem Stern bezeichnet.

Die Auflöſung der Aufgabe ſelbſt hat nicht die mindeſte Schwierigkeit, wenn man den Gang der vorigen Auflöſung beibehält. Die dritte Zahl ſei $=7x$, damit ſie ſich ohne Reſt durch 7 theilen laſſe. Wenn dieſe Zahl nun $\frac{1}{7}$ ihres Werthes $+8$ an die erſte abgiebt, ſo wird ſie $=6x-8$, ſie ſoll aber nach der Aufgabe $=\frac{80}{3}$ werden, und muß daher von der zweiten Zahl $\frac{80}{5}-(6x-8)$ d. i. $\frac{104}{5}-6x$ erhalten. Was die zweite Zahl abgiebt, iſt 7 mehr als ein Sechstel ihres Wer-

thes, zieht man alſo 7 von $\frac{104}{3} - 6x$ ab, ſo iſt der Reſt $\frac{83}{3} - 6x$ der ſechste Theil der zweiten Zahl, und die zweite Zahl ſelbſt iſt $166 - 36x$. Wenn die zweite Zahl aber $\frac{104}{3} - 6x$ abgiebt, ſo wird ſie $\frac{394}{3} - 30x$, und da ſie zuletzt $= \frac{80}{3}$ werden ſoll, ſo muß ſie von der erſten Zahl $\frac{80}{3} - \left(\frac{394}{3} - 30x\right)$ d. i. $30x - \frac{314}{3}$ erhalten. Was die erſte Zahl abgiebt, ſoll aber 6 mehr als ein Fünftel ihres Werthes ſein, alſo iſt $30x - \frac{332}{3}$ der fünfte Theil der erſten Zahl, und die erſte Zahl ſelbſt $150x - \frac{1660}{3}$. Die Summe aller drei Zahlen iſt alſo $= 121x - \frac{1162}{3}$, und da eben dieſe Summe auch 80 ſein ſoll, ſo hat man

$$121x - \frac{1162}{3} = 80,$$

woraus ſich zuerſt x, und dann die Zahlen ſelber leicht berechnen laſſen.

XXI.

Den allgemeinen Ausdruck für das größte Quadrat findet Diophantus durch folgende Betrachtung. Der Unterſchied des kleinſten und mittelſten Quadrats iſt $2x + 1$, der Unterſchied des mittelſten und größten ſoll

aber 3 Mal ſo groß, alſo $=6x+6$ ſein; addirt man dies zu dem mittelſten Quadrat, ſo erhält man x^2+8x+4.

Um über die Bedingung, welche bei der Wahl der Wurzel beobachtet werden ſoll, ſicherer zu urtheilen, ſei das größte Quadrat $=x^2+ax+b$, die Wurzel deſſelben $=x+c$, ſo hat man die Gleichung

$$x^2+ax+b=x^2+2cx+c^2, \text{ alſo } x=\frac{c^2-b}{a-2c}.$$

Die Formel zeigt, daß c^2 größer ſein muß als b, dagegen a größer als 2c, wenn x nicht einen negativen Werth erhalten ſoll. Dieſe Bedingung drückt Diophantus mit Worten aus, wobei das Wort Einheiten immer die beſtimmten Zahlen c^2 und b bezeichnet, welche den einen Theil von dem Quadrate beider zweitheiligen Größen ausmachen.

In dem vorliegenden Falle mußte alſo c^2 größer als 4, aber 2c kleiner als 8 ſein, und daher war 2 zu klein und 4 zu groß, als daß man es für c hätte ſetzen können. In ganzen Zahlen konnte daher c nur den Werth 3 erhalten.

Die Wurzel mußte nothwendig ein Glied x enthalten, damit ſich in der Gleichung x^2 gegen x^2 aufhebe, ſie konnte aber $=x-c$ geſetzt werden, in welchem Falle man

$$x=\frac{c^2-b}{a+2c}.$$

erhält. Dadurch wird die Bedingung für c einfacher, denn man kann für c jede Zahl ſetzen, deren Quadrat größer als b iſt.

Die gefundenen Zahlen haben ſämmtlich den Nenner 4, welchen man aber wegwerfen kann, da es in jedem Falle erlaubt iſt, die gefundenen Zahlen mit einer beliebigen Quadratzahl zu multipliciren. Sind nämlich die Zahlen a^2, b^2, c^2 ſo beſchaffen, wie es die Bedingung verlangt, ſo iſt

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2,$$

daher aber iſt auch, wenn n eine beliebige Zahl bedeutet,

$$a^2 n - b^2 n = b^2 n - c^2 n,$$

ſollen aber die auf dieſe Weiſe entſtandenen Zahlen wieder Quadrate ſein, ſo muß n nothwendig eine Quadratzahl ſein.

XXI. — XXII.

In dieſen Aufgaben zeigt Diophantus zuerſt einen ſehr vortheilhaften Kunſtgriff zur zweckmäßigen Einrichtung des Anſatzes; wenn nämlich die geſuchten Zahlen zwei oder mehre Bedingungen zugleich erfüllen ſollen, ſo wählt er den allgemeinen Ausdruck für dieſe Zahlen ſo, daß ſie durch ihre bloße Form alle Bedingungen bis auf eine erfüllen, wo denn die letzte durch den für x geſetzten Zahlenwerth erfüllt werden muß.

Was bei der Wahl der Wurzeln zu beobachten iſt, damit x nicht unmögliche oder negative Werthe erhalte, iſt im Vorigen ſchon gezeigt, und wird ſich ohne Schwierigkeit angeben laſſen, wenn man die Diophantiſche Auflöſung durch allgemeine Zeichen vorſtellt.

XXIII. — XXIV.

Das Verfahren, durch welches Diophantus dieſe beiden Aufgaben löſ't, kann dadurch leicht zu einer falſchen Anwendung verleiten, daß er zwei nur um 1 verſchiedene Zahlen gewählt hat. Wir wollen daher die Art, wie der Anſatz in der erſten Aufgabe gefunden wird, allgemein vorſtellen, woraus ſich das Verfahren ſelbſt ohne Zweideutigkeit beurtheilen läßt.

Man ſetze die erſte Zahl $=x$, und mache das Quadrat von $x+a = x^2+2ax+a^2$, wo a eine ganz beliebige Zahl iſt. Nun nehme man an, $2ax+a^2$ ſei die Summe der Zahlen, folglich $(2a-1)x+a^2$ die zweite Zahl, ſo iſt die erſte Bedingung durch den bloßen Anſatz erfüllt. Nun ſoll auch das Quadrat der zweiten Zahl mit der Summe der Zahlen zuſammen genommen ein Quadrat geben. Dieſe Summe wird aber

$$(2a-1)^2x^2+2a^2(2a-1)x+2ax+a^4+a^2.$$

Setzt man die Wurzel $=(2a-1)x-b$, ſo erhält man

$$x=\frac{b^2-(a^2+1)a^2}{2(a^2+b)(2a-1)+2a}.$$

Setzt man, wie Diophantus gethan hat, $a=1$, ſo wird

$$x=\frac{b^2-2}{2b+2}.$$

Bei der letzten Aufläſung muß b^2 größer als 2, bei der allgemeinen Auflöſung aber größer als $(a^2+1)a^2$ ſein.

XXV.

Setzt man die erſte Zahl $=(a^2-1)x^2$, die zweite $=(b^2-1)x^2$, und das Quadrat der Summe beider Zahlen $=x^2$, ſo werden durch den bloßen Anſatz beide Bedingungen erfüllt, und es kommt bloß darauf an, den Werth von x zu beſtimmen.

Nun iſt aber die Summe beider Zahlen ein Mal $=x$, weil x^2 das Quadrat dieſer Summe ſein ſoll, und dann auch $=(a^2+b^2-2)x^2$. Man hat alſo

$$(a^2+b^2-2)x^2=x, \text{ und } x=\frac{1}{a^2+b^2-2}.$$

Durch dies Verfahren erhält man für x alle Mal einen Bruch mit dem Zähler 1, man kann aber die Aufgabe noch allgemeiner ſo auflöſen. Die erſte Zahl ſei $(a^2-c^2)x^2$, die zweite $(b^2-c^2)x^2$, die Summe der Zahlen $=cx$, ſo werden ebenfalls beide Bedingungen durch den Anſatz erreicht, und man findet

$$x=\frac{c}{a^2+b^2-2c^2}.$$

XXVI.

Man nehme ein beliebiges Quadrat z. B. $a^2+2ab+b^2$, und ziehe davon das eine Mal $2ab+b^2$, das andere Mal a^2+2ab ab, ſo ſind die Reſte a^2 und b^2 gewiß Quadrate. Die hier abgezogenen Zahlen mache man zu Coefficienten von x^2, denn das iſt beim Diophantus τάσσειν τους ἀρίθμους ἐν δυνάμει, ſo iſt die eine

Zahl $(2ab+b^2)x^2$, die andere $(a^2+2ab)x^2$. Setzt man nun das Quadrat ihrer Summe $=(a^2+2ab+b^2)x^2$, alſo die Summe $=(a+b)x$, ſo ſind alle Bedingungen erfüllt. Den Werth von x findet man aber ſehr leicht, da man für die Summe einen doppelten Ausdruck hat; es iſt nämlich

$$(a^2+b^2+4ab)x^2=(a+b)x, \text{ alſo } x=\frac{a+b}{a^2+b^2+4ab},$$

und man darf a und b ganz beliebig wählen.

XXVII.

Der Satz, von welchem Diophantus ausgeht, gilt nicht bloß für die Zahl 4, ſondern für jede Quadratzahl. Man ſetze die kleinere Zahl $=x$, die größere $=a^2x-1$, ſo iſt das Produkt beider a^2x-x, und wenn man die kleinere Zahl dazu addirt, ſo erhält man a^2x^2 oder das Quadrat von ax.

Hiernach läßt ſich die Auflöſung allgemeiner vorſtellen. Die kleinere Zahl ſei $=x$, die größere $=a^2x-1$, ſo iſt die erſte Bedingung durch den bloßen Anſatz erreicht. Nun ſoll aber das Produkt beider Zahlen auch dann noch ein Quadrat werden, wenn man die größere Zahl dazu addirt, d. h. $a^2x^2+(a^2-1)x-1$ ſoll ein Quadrat ſein.

Nach dem Vorigen findet man ſehr leicht einen Werth für x, durch welchen die obige Formel ein Quadrat wird. Die Summe beider Wurzeln ſoll aber eine beſtimmte Zahl ſein, die wir durch b bezeichnen wollen.

Da nun das erſte Quadrat ax zur Wurzel hat, ſo muß das zweite b—ax zur Wurzel haben, es iſt alſo

$$a^2x^2 + (a^2 - 1)x - 1 = a^2x^2 - 2abx + b^2,$$

folglich wird $x = \frac{b^2+1}{a^2+2ab+1}$.

XXVIII.

Da der von Diophantus angeführte Satz wieder für jedes Quadrat gilt, ſo ſetze man die kleinere Zahl $=x$, die größere $=a^2x+1$, ſo iſt das Produkt beider $=a^2x^2+x$, und wenn man hiervon die kleinere Zahl abzieht, ſo erhält man das Quadrat a^2x^2, deſſen Wurzel ax iſt.

Die zweite Bedingung verlangt aber, daß auch $a^2x^2+x-a^2x-1$ ein Quadrat ſei, und wenn wir b in der Bedeutung beibehalten, die es in der vorigen Aufgabe hatte, ſo iſt

$$a^2x^2-(a^2-1)x-1=(b-ax)^2=a^2x^2-2abx+b^2,$$

folglich wird $x = \frac{b^2+1}{2ab-(a^2-1)}$.

XXIX.

Da das Verfahren, durch welches Diophantus den urſprünglichen Anſatz berichtigt, in der Folge ſo oft gebraucht wird, ſo iſt es zweckmäßig daſſelbe hier ein für alle Mal zu erläutern. Wenn Diophantus eine Aufgabe löſen will, welche mehre Bedingungen enthält, ſo wählt

er für die geſuchten Größen ſolche Ausdrücke, welche durch ihre bloße Form wenigſtens eine oder mehre der aufgeſtellten Bedingungen erfüllen. In dem gegenwärtigen Falle ſollen zuerſt beide geſuchte Zahlen Quadratzahlen ſein, und Diophantus ſetzt daher die eine $= x^2$, die andere $= 1$, wodurch die erſte Bedingung bereits erfüllt wird. Nun ſoll aber das Produkt dieſer beiden Zahlen d. i. x^2 auch dann noch ein Quadrat bleiben, wenn man jedwede der beiden Zahlen dazu addirt, d. h. es ſoll ſowohl $2x^2$ als x^2+1 ein Quadrat ſein. Nun kann aber $2x^2$ nie ein Quadrat werden, weil der Coefficient 2 kein Quadrat iſt, und die Auflöſung würde unmöglich ſein, wenn man den anfänglich gewählten Anſatz beibehalten wollte.

Man überlege daher, auf welche Weiſe $2x^2$ entſtanden iſt. Offenbar dadurch, daß man x^2 mit der Quadratzahl 1 multiplicirt, und zu dem Producte den einen Factor x^2 addirt hat. Man muß alſo ſtatt 1 eine andere Quadratzahl von der Beſchaffenheit wählen, daß, wenn man dieſelbe mit x^2 multiplicirt, und x^2 dazu addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird. Nennen wir dieſe ſtatt 1 zu wählende Quadratzahl z^2, ſo ſoll alſo $z^2x^2+x^2=(z^2+1)x^2$ ein Quadrat ſein. Dies iſt aber nur möglich, wenn z^2+1 ein Quadrat iſt, und wir müſſen alſo in einer vorläufigen Aufgabe ein Quadrat ſuchen, welches um 1 vermehrt ein Quadrat wird.

Dieſe hier ausgeführten Schlüſſe hat Diophantus nicht ausführlich dargelegt, und bloß dadurch entſteht

eine Art von Dunkelheit in der ſonſt ſo klaren Darſtellung unſeres Verfaſſers. Eine andere Dunkelheit kann dadurch entſtehen, daß Diophantus in der vorläufigen Aufgabe das geſuchte Quadrat, welches er für 1 ſetzen will, ebenfalls durch δύναμις μία bezeichnet, man muß aber dieſe vorläufige Aufgabe, welche bloß zur Berichtigung des urſprünglichen Anſatzes dienen ſoll, von der eigentlichen Hauptaufgabe wohl unterſcheiden.

Behalten wir für das Quadrat, welches ſtatt 1 geſetzt werden ſoll, das allgemeine Zeichen z^2 bei, ſo läßt ſich z^2+1 leicht zu einem Quadrat machen, denn ſetzt man

$$z^2+1=(z-2)^2=z^2+4z+4,$$

ſo erhält man $z=\frac{3}{4}$, alſo $z^2=\frac{9}{16}$.

Nunmehr kehrt Diophantus zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, und ſetzt die eine geſuchte Zahl, wie vorher, $=x^2$, die andere $=\frac{9}{16}$, und durch dieſen Anſatz werden zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt, denn zuerſt ſind die beiden geſuchten Zahlen Quadrate, und wenn man zu dem Produkt derſelben, $\frac{9}{16}x^2$, den einen Factor $x^2=\frac{16}{16}x^2$ addirt, ſo erhält man die Quadratzahl $\frac{25}{16}x^2$. Es iſt alſo nur noch die eine Bedingung zu erfüllen, nach welcher auch $\frac{9}{16}x^2+\frac{9}{16}$ ein Quadrat ſein ſoll. Dies wird aber der Fall ſein, wenn $9x^2+9$ ein Quadrat iſt, da jedes Quadrat durch ein anderes Qua-

drat multiplicirt oder dividirt, wieder ein Quadrat giebt. Man ſetze daher

$$9x^2+9=(3x-4)^2=9x^2-24x+16,$$

woraus man für x den Werth $\frac{7}{24}$, und $x^2=\frac{49}{576}$ erhält.

Die eine der geſuchten Zahlen iſt alſo $\frac{9}{16}$, wofür man $\frac{324}{576}$ ſchreiben kann, die andere $\frac{49}{576}$. Das Product dieſer beiden Zahlen iſt $\frac{441}{9216}$; addirt man dazu die erſte Zahl $\frac{324}{576}=\frac{5184}{9216}$, ſo erhält man $\frac{5625}{9216}$, wovon $\frac{75}{96}$ die Quadratwurzel iſt; addirt man aber zu dem Producte die zweite Zahl $\frac{49}{576}=\frac{784}{9216}$, ſo erhält man $\frac{1225}{9216}$, wovon die Wurzel $\frac{35}{96}$ iſt, ſo daß alſo die gefundenen Zahlen leiſten, was die Aufgabe vorſchreibt.

Die vorläufige Aufgabe, welche hier zu löſen war, läßt ſich übrigens noch allgemeiner faſſen, als Diophantus ſie ausdrückt, nämlich in folgender Art:

es iſt ein Quadrat gegeben, und man ſoll ein anderes Quadrat von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Product beider auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man das gegebene Quadrat dazu addirt.

Das gegebene Quadrat heiße a^2, das geſuchte aber ſei z^2, nun iſt das Product beider a^2z^2, und die Formel $a^2z^2+a^2$ ſoll wieder ein Quadrat ſein. Man ſetze die Wurzel $=az-b$, ſo hat man die Gleichung

$$a^2z^2+a^2=a^2z^2-2abz+b^2, \text{ und } z=\frac{b^2-a^2}{2ab}.$$

Es ſei z. B. $a^2=4$, und $b^2=9$, ſo wird $z=\frac{5}{12}$, und $z^2=\frac{25}{144}$. Daher wird $a^2z^2+a^2=\frac{100}{144}+\frac{576}{144}=\frac{676}{144}$, ein Quadrat, deſſen Wurzel $\frac{26}{12}$ oder $2\frac{1}{6}$ iſt.

Vermittelſt dieſer vorläufigen Aufgabe läßt ſich nun auch die Hauptaufgabe viel allgemeiner löſen. Denn man nehme zwei beliebige Quadrate a^2 und b^2, von welchen a^2 das kleinere ſei, und ſetze die eine der geſuchten Zahlen $=a^2x^2$, die andere $=\left(\frac{b^2-a^2}{2ab}\right)^2$, ſo iſt aus dem Vorigen klar, daß das Produkt beider Zahlen oder $\frac{b^4-2a^2b^2+a^4}{4a^2b^2}.a^2x^2$ auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man a^2x^2 dazu addirt. Es iſt alſo nur noch die eine Bedingung zu erfüllen, daß auch $\frac{b^4-2a^2b^2+a^4}{4a^2b^2}.a^2x^2+\frac{b^2-a^2}{2ab}$ ein Quadrat werde. Dies geſchieht aber, ſobald man $\frac{b^2+a^2}{2b}x-c$ als die Wurzel der obigen Formel anſieht.

XXX.

Das Verfahren, durch welches Diophantus den Anſatz berichtigt, beruht ganz auf den in der vorigen Anmerkung entwickelten Gründen. Denn wenn man zuerſt die eine Zahl $=x^2$, die andere $=1$ ſetzt, ſo iſt das Produkt beider $=x^2$, und nun ſoll ſowohl x^2-1 als x^2-x^2

ein Quadrat ſein. Dies zeigt aber deutlich, daß der gewählte Anſatz nicht zweckmäßig iſt, denn x^2-1 iſt an ſich kein Quadrat, wie doch nach dem Gange in der vorigen Aufgabe bezweckt wurde, und die Differenz x^2-x^2 wird $=0$, ein Fall auf welchen Diophantus nie Rückſicht nimmt. Daher muß man ſtatt 1 ein anderes Quadrat ſetzen, und dieſes muß man ſo wählen, daß, wenn man es mit x^2 multiplicirt, und von dem Produkte x^2 abzieht, der Reſt noch immer ein Quadrat bleibt. Bezeichnen wir dies Quadrat durch z^2, ſo ſoll alſo $z^2x^2-x^2=(z^2-1)x^2$ ein Quadrat ſein. Dies iſt nur möglich, wenn z^2-1 ein Quadrat iſt, und ſo haben wir alſo vorläufig ein Quadrat zu ſuchen, welches, um 1 vermindert, noch immer ein Quadrat bleibt. Man ſetze alſo

$$z^2-1=(z-2)^2=z^2-4z+4,$$

ſo wird $z=\frac{5}{4}$ alſo $z^2=\frac{25}{16}$.

Nunmehr wird der urſprüngliche Anſatz dahin geändert, daß die eine Zahl $=x^2$, die andere $=\frac{25}{16}$ geſetzt wird, denn ſo werden zwei Bedingungen der Aufgabe auf ein Mal erfüllt. Die geſuchten Zahlen ſind nämlich Quadrate, und wenn man von ihrem Produkt $\frac{25}{16}x^2$, die erſte Zahl oder x^2 abzieht, ſo wird der Reſt $\frac{9}{16}x^2$ ebenfalls ein Quadrat, und es iſt nur noch die eine

Be-

Bedingung zu erfüllen, nach welcher $\frac{25}{16}x^2-\frac{25}{16}$ ein Quadrat werden ſoll.

Der übrige Theil der Auflöſung iſt in dem Text der Ueberſetzung ſelbſt deutlich enthalten. In dem Text des Diophantus findet ſich zuletzt eine kleine Verwirrung; es wird nämlich nicht erwähnt, daß die Formel $\frac{25}{16}x^2-\frac{25}{16}$, nachdem ſie durch 16 multiplicirt iſt, auch noch durch 25 dividirt werden muß, deſſen ungeachtet nennt Diophantus der Formel x^2-1 als diejenige, welche man zu einem Quadrat machen ſoll, und ſetzt dann wieder $x^2-8x+16=25x^2-25$, als wäre dieſe Diviſion nicht geſchehen. Ich habe kein Bedenken getragen, die von Bachet vorgeſchlagene Aenderung des Textes ſei gleich in die Ueberſetzung aufzunehmen, weil hier offenbar eine auf Rechnung des Sammlers kommende Verwirrung obwaltet.

Dem Anfänger, welcher mit dem oft nur angedeuteten Gang des Diophantus noch nicht recht bekannt iſt, empfehle ich, die Gründe, weßhalb vorläufig ein Quadrat geſucht werden muß, welches um 1 vermindert, noch ein Quadrat bleibt, ſich recht deutlich zu machen. Offenbar ſoll dieſes Quadrat ſtatt des ganz unzweckmäßig gewählten Quadrates 1 geſetzt werden; aber ſo wie Diophantus die Auflöſung vorträgt, kann man zu der irrigen Annahme verleitet werden, als ſolle x^2-1 zu einem Quadrat gemacht werden, um einen Theil der Hauptaufgabe zu lö-

ſen, da es doch bloß auf die Berichtigung des Anſatzes abgeſehen iſt.

XXXI.

Der Lehnſatz, auf welchen ſich Diophantus beruft, ſpricht bloß den bekannten Satz aus, daß ſowohl $a^2+2ab+b^2$ als $a^2-2ab+b^2$ ein Quadrat ſei. Hierauf gründet ſich aber folgende allgemeine Auflöſung der Aufgabe.

Man ſetze die eine Zahl $=x$, die andere $=(a^2+b^2)x$. Iſt nun die Summe der Zahlen $=2abx^2$, ſo wird das Produkt derſelben $=(a^2+2ab+b^2)x^2$, wenn man die Summe der Zahlen dazu addirt, und $=(a^2-2ab+b^2)x^2$, wenn man die Summe der beiden Zahlen davon abzieht, alſo in beiden Fällen ein vollſtändiges Quadrat. Da nun die Summe der Zahlen das eine Mal $2abx^2$, und dann wieder $(a^2+b^2+1)x$ iſt, ſo hat man die Gleichung

$$2abx^2=(a^2+b^2+1)x, \text{ und } x=\frac{a^2+b^2+1}{2ab},$$

wo man a und b vollkommen willkührlich wählen kann. Man ſetze z. B. $a=5$ und $b=3$, ſo iſt $a^2+b^2+1=25+9+1=35$, $2ab=30$, alſo $x=\frac{35}{30}=\frac{7}{6}$.

Die eine der geſuchten Zahlen iſt alſo $\frac{7}{6}$, die andere aber $(a^2+b^2)x=(25+9)\frac{7}{6}=\frac{238}{6}$. Das Produkt

dieſer Zahlen iſt $\frac{1666}{36}$, die Summe $\frac{245}{6}$ oder $\frac{1470}{36}$. Addirt man alſo die Summe zu dem Produkte, ſo erhält man $\frac{3136}{36}$, ein Quadrat deſſen Wurzel $\frac{56}{6}$ iſt; zieht man aber die Summe der Zahlen von ihrem Produkte ab, ſo erhält man $\frac{196}{36}$, ein Quadrat deſſen Wurzel $\frac{14}{6}$ iſt.

XXXII.

Der Lehnſatz, auf welchen ſich Diophantus bezieht, iſt auch ohne den kunſtgerechten Beweis, den man auf den Begriff **ähnlicher Flächenzahlen** und auf Euklides IX. 1. gründen kann, vollkommen einleuchtend. Denn zwei Zahlen, deren eine das Doppelte der andern iſt, laſſen ſich ganz allgemein durch a und 2a vorſtellen, das doppelte Produkt derſelben iſt alſo 2.2.a.a, welches nothwendig ein Quadrat iſt.

Der Satz iſt aber noch in größerer Ausdehnung richtig, denn wenn ſich zwei Zahlen wie 1:m verhalten, alſo durch a und ma vorgeſtellt werden können, ſo iſt das m fache Produkt derſelben m.m.a², alſo auch eine Quadratzahl, weil es jeden Factor in einer geraden Anzahl enthält.

Der zweite Theil des Lehnſatzes iſt mit dem in XXXI. angeführten Satze einerlei.

XXXIII.

Der Lehnſatz ſagt bloß, daß $(x+1)^2=x^2+2x+1$ ſei, und man ſieht leicht, warum Diophantus die eine Zahl $=x$, die andere $=2x+1$ ſetzt.

Will man andere, als die hier berechneten Zahlen haben, ſo kann man entweder die Wurzel $x-4$ mit einer anderen vertauſchen, oder auch den ganzen Anſatz verändern. Setzt man z. B. die erſte Zahl $=ax$, ſo wird die zweite $=2ax+1$; im Uebrigen kann man ganz, wie in der Aufgabe ſelbſt, verfahren.

XXXIV.

So wie x^2+2x+1 das Quadrat von $x+1$ iſt, ſo iſt x^2-2x+1 das Quadrat von $x-1$. Nun iſt aber $x^2-2x+1=x^2-(2x-1)$. Iſt nun die kleinere Zahl $=x$, die größere $=2x-1$, ſo ſagt die obige Formel daſſelbe, was Diophantus mit Worten ausdrückt.

XXXV.

Der von Diophantus angeführte Satz läßt ſich auf folgende Art ganz allgemein beweiſen. Es habe die Zahl ab die beiden Factoren a und b, von welchen a der größere ſein mag. Man ziehe den kleineren Factor von dem größeren ab, und die Hälfte des Reſtes, $\frac{a-b}{2}$

erhebe man ins Quadrat, ſo erhält man $\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$. Addirt man dazu die erſte Zahl ab, wofür man auch $\frac{4ab}{4}$ ſchreiben kann, ſo verwandelt ſich die vorige Formel in dieſe $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$, welche das Quadrat von $\frac{a+b}{2}$ iſt.

Man könnte alſo ſtatt 12 jede andere Zahl nehmen, welche ſich auf dreifache Art in zwei Factoren zerfällen läßt. So hat z. B. 48 die Factoren 2×24, 4×12, 6×8, und man findet nach dem angeführten Satze die Quadratzahlen $11^2+48=169$, $4^2+48=64$, $1^2+48=49$. Man ſetze alſo die erſte Zahl $=11x$, die zweite $=4x$, die dritte $=x$, die Summe der Zahlen $=48x^2$. Da dieſe Summe auch $=16x$ iſt, ſo hat man die Gleichung

$$48x^2=16x, \text{ und } x=\frac{1}{3}.$$

Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{11}{3}$, die zweite $\frac{4}{3}$, die dritte $\frac{1}{3}$.

XXXVI.

Die Gründe, auf denen der Anſatz beruht, ſind faſt die nämlichen, welche in der vorigen Aufgabe entwickelt wurden, daher Diophantus ſie nicht umſtändlicher aus einander ſetzt. Wenn nämlich eine Zahl ab die beiden Factoren a und b hat, ſo giebt die halbe Summe der Factoren, oder $\frac{a+b}{2}$, ins Quadrat erhoben, $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$.

Zieht man davon $ab = \frac{4ab}{4}$ ab, ſo erhält man $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}$, welches das Quadrat von $\frac{a-b}{2}$ iſt.

Uebrigens läßt ſich dieſe, wie die vorige Aufgabe, auf ſo viele Zahlen ausdehnen, als irgend verlangt wird, wenn man die gewählte Zahl ſo viele Male in zwei Factoren zerfällt, als Zahlen geſucht werden.

Anmerkungen zum dritten Buche.

I. — IV.

Der Kunſtgriff, durch welchen Diophantus einen zweckmäßigen Anſatz findet, iſt ſo einfach, daß man nur nöthig hat, ihn bei einer dieſer Aufgaben ſich deutlich zu machen, um ihn ſogleich auf die folgenden Aufgaben anwenden zu können.

Um für die erſte Aufgabe einen zweckmäßigen Anſatz zu erhalten, nehme man eine Zahl, welche wie die Zahl 5 die Summe zweier Quadrate iſt, und welche allgemein durch a^2+b^2 vorgeſtellt werden kann. Dieſe Zahl theile man nach II, 10 von Neuem in zwei Quadrate, und eines derſelben ſei c^2. Hierauf ſetze man die erſte Zahl $=ax$, die zweite $=bx$, die dritte $=cx$, die Summe der drei Zahlen aber ſei $=(a^2+b^2)x^2$, ſo werden, wie man ſogleich überſieht, alle drei Bedingungen auf ein Mal erfüllt, denn wenn man die Quadrate der drei Zahlen von der Summe derſelben einzeln abzieht, ſo ſind die Reſte a^2x^2, b^2x^2, $(a^2+b^2-c^2)x^2$,

alſo in jedem Falle Quadrate, da man durch ein beſonders Verfahren c ſo beſtimmt hat, daß $a^2+b^2-c^2$ ein Quadrat wird. Nun hat man einen doppelten Ausdruck für die Summe der Zahlen, und daraus die Gleichung

$$(a^2+b^2)x^2 = (a+b+c)x, \text{ folglich } x = \frac{a+b+c}{a^2+b^2}.$$

V — VI.

In der erſten Auflöſung findet Diophantus die dritte und erſte Zahl nach dem in der Anmerkung zu I, 18 erläuterten Satze: wenn man den Ueberſchuß der beiden erſten Zahlen über die dritte von der Summe aller drei Zahlen abzieht, ſo erhält man das Doppelte der dritten. In unſerem Falle ſoll das Quadrat x^2+2x+1 die Summe aller drei Zahlen, 1 aber der Ueberſchuß dieſer Summe über die beiden erſten Zahlen ſein, daher iſt x^2+2x das Doppelte der dritten Zahl, alſo die dritte Zahl ſelbſt $\frac{1}{2}x+x$. Wenn ferner x^2 der Ueberſchuß der Summe aller drei Zahlen über die Summe der zweiten und dritten iſt, ſo iſt der Reſt $2x+1$ das Doppelte der erſten Zahl, alſo die erſte Zahl $x+\frac{1}{2}$, und man erhält die zweite Zahl durch bloße Subtraction $=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$.

Die zweite Auflöſung beruht ganz auf zwei früheren Aufgaben. Man ſucht zuerſt drei Quadratzahlen, deren Summe ein Quadrat iſt. Zu dieſem Ende nimmt

man zwei willkührliche Quadratzahlen z. B. 4 und 9, deren Summe $=13$, und ſucht nun nach II, 11 zwei Quadrate, deren Unterſchied 13 iſt, und findet 36 und 49. Da nun die Summe $36+9+4$ wieder ein Quadrat iſt, ſo kommt es nur darauf an, die drei Zahlen ſo zu beſtimmen, daß 4, 36, 9 der Unterſchied zwiſchen der Summe von je zweien und der dritten Zahl werden. Wenn wir die drei geſuchten Zahlen der Reihe nach A, B, C nennen, und $D=4$, $\delta=9$, $d=36$ ſetzen, ſo wird nach den früher entwickelten Formeln

$$A = \frac{D+\delta}{2} = \frac{4+9}{2} = 6\frac{1}{2}.$$

$$B = \frac{D+d}{2} = \frac{4+36}{2} = 20.$$

$$C = \frac{d+\delta}{2} = 9+36 = 22\frac{1}{2}.$$

Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß ſich dies Verfahren auf ſo viele Zahlen, als man immer will, ausdehnen läßt.

VII — VIII.

Man ſetze die Summe der drei Zahlen $=(x+a)^2$ $=x^2+2ax+a^2$, die Summe der erſten und zweiten Zahl $=x^2$, die Summe der zweiten und dritten aber $=(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$, ſo ſind bereits drei Bedingungen erfüllt. Aus dieſem Anſatz folgt aber, daß die erſte Zahl $=4ax$, die zweite $=x^2-4ax$, die dritte endlich $=2ax+a^2$ ſei. Um die Summe der erſten und

dritten Zahl, d. i. $6ax+a^2$ auch zu einem Quadrat zu machen, ſetze man

$$6ax+a^2=b^2, \text{ ſo wird } x=\frac{a^2-b^2}{6a}.$$

Die Zahlen a und b können hier zwar willkührlich gewählt werden, doch muß a^2 größer als b^2 ſein, auch der ganze Anſatz ſo eingerichtet werden, daß x^2 größer als $4ax$ wird, weil man ſonſt für die zweite Zahl einen negativen Werth erhält. Auf welche Weiſe aber b zu beſtimmen ſei, damit auch dieſe Bedingung erfüllt werde, dies wird erſt in der Folge gezeigt werden.

Die zweite Auflöſung iſt von der erſten im Weſentlichen gar nicht verſchieden.

IX.

Man bezeichne die drei Quadrate, welche Diophantus in der vorläufigen Aufgabe geſucht hat, und welche eine zunehmende arithmetiſche Reihe bilden, der Folge nach durch a^2, b^2, c^2, ſo kommt es darauf an, drei Zahlen von der Beſchaffenheit zu finden, daß die Summe der erſten und zweiten $=a^2$, die Summe der zweiten und dritten $=c^2$, die Summe der erſten und dritten $=b^2$ ſei; denn da die drei geſuchten Zahlen auch eine zunehmende arithmetiſche Reihe bilden ſollen, in einer ſolchen Reihe aber die Summe des zweiten und dritten Gliedes nothwendig größer iſt, als die Summe des erſten und dritten, ſo kann c^2, als das größte der drei Quadrate, nur die Summe des zweiten und dritten Gliedes

ſein, oder man muß, wie Diophantus ſich darüber ausdrückt, die Ordnung umkehren.

Setzt man nun die Summe der Zahlen $=x$, ſo iſt die erſte Zahl $=x-c^2$, die zweite $=x-b^2$, die dritte $=x-a^2$, und man hat die Gleichung

$$3x-(a^2+b^2+c^2)=x, \text{ alſo } x=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Aus der Formel ergiebt ſich, daß und warum die halbe Summe der drei Quadrate, wenn ſie zur Auflöſung brauchbar ſein ſollen, größer ſein muß, als jedes derſelben einzeln genommen. Denn wäre z. B. $a^2>\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ d. i. größer als x, ſo würde die dritte Zahl $x-a^2$ einen negativen Werth erhalten.

Von den gefundenen Zahlen beweiſt Diophantus zwar nicht, daß ſie eine arithmetiſche Reihe bilden, es iſt aber aus ihrer Entſtehungsart vollkommen klar. Denn wenn z. B. drei Zahlen A, B und C ſo beſchaffen ſind, daß die Summen von je zweien eine arithmetiſche Reihe bilden, ſo wird von den Zahlen ſelbſt das Nämliche gelten. Aus der Annahme folgt nämlich

$$C+B-(C+A)=(C+A)-(B+A)$$

Vollzieht man aber die angedeutete Rechnung, ſo erhält man

$$B-A=C-B, \text{ oder } C-B=B-A.$$

Wie man die drei Quadrate ſo beſtimmen könne, daß jedes derſelben kleiner ſei als die halbe Summe derſelben, hat Diophantus nicht berührt. Eben dieſe Be-

$n^2 - 2$ nicht kleiner als $6n + 12$, oder $n^2 - 6n$ nicht kleiner als 14 wird. Man betrachte $n^2 - 6n = 14$ als eine vermiſchte quadratiſche Gleichung, ſo findet man $n = 3 + \sqrt{14}$. Die Zahl n muß alſo größer als $3 + \sqrt{14}$, alſo in ganzen Zahlen mindeſtens $= 8$ ſein, und deßhalb ſetzt Diophantus die geſuchte Wurzel $= x - 8$.

X — XI.

Das in der vorigen Anmerkung erklärte Verfahren kann man ſogleich auf dieſe beiden Aufgaben anwenden.

Um in der X. Aufgabe die Formel $6x + 22$ zu einem Quadrat zu machen, ſetzt man dieſelbe irgend einem Quadrat gleich, das wir durch n^2 bezeichnen wollen, und welches, wie man ſogleich ſieht, größer als 22 ſein muß. Nun wird $x = \frac{n^2 - 22}{6}$. Die zweite Zahl aber iſt $x^2 + 2x - 6$, daher muß $x^2 + 2x$ d. i. $\frac{n^4 - 38n^2 + 362}{36}$ größer als 6, oder $n^4 - 38n^2$ größer als -156 ſein. Dieſe biquadratiſche Gleichung läßt ſich wie eine quadratiſche behandeln, und man findet $n^2 > 19 + \sqrt{205}$. Iſt daher n^2 eine ganze Zahl, ſo muß ſie größer als 34, alſo mindeſtens $= 36$ ſein.

In der folgenden XI. Aufgabe ſetzt man $6x + 4 = n^2$, ſo wird $x = \frac{n^2 - 4}{6}$. Nun iſt die zweite Zahl $= x^2 - 2x$, alſo iſt $x^2 > 2x$ d. h. $\frac{n^4 - 8n^2 + 16}{36} > \frac{12n^2 - 48}{36}$, oder $n^4 - 20n^2 > -60$. Behandelt man dieſen Ausdruck

wie eine vermiſchte quadratiſche Gleichung, ſo wird $n^2 > 10 + \sqrt{40}$. Wenn alſo n^2 eine ganze Zahl ſein ſoll, ſo iſt ſie größer als 16, und man kann daher für n^2 alle Quadrate ſetzen von 25 an.

XII.

Der urſprüngliche Anſatz führt darauf, daß $52x^2 + 12$ ein Quadrat ſein ſoll, welches auf dem gewöhnlichen Wege bewirkt werden könnte, wenn der Coefficient $52 = 13 . 4$ ein Quadrat wäre. Es war daher nicht zweckmäßig die Zahlen 13 und 4 zu Coefficienten der erſten und dritten Zahl zu wählen, denn dadurch erreicht man nur die eine Bedingung, daß jeder Coefficient um 12 vermehrt, ein Quadrat wird, aber nicht die zweite, daß nämlich ihr Produkt auch ein Quadrat ſei. Dieſe letzte Bedingung wird aber gewiß erreicht, wenn man für dieſe Coefficienten ein Paar Quadratzahlen nimmt, deren jede auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man 12 dazu addirt. Auf dem bekannten Wege findet Diophantus, daß 4 und $\frac{1}{4}$ die verlangte Eigenſchaft haben, und berichtigt hiernach den urſprünglichen Anſatz.

Die beiden Quadrate 4 und $\frac{1}{4}$ zu finden, ſucht Diophantus zwei Mal hinter einander zwei Quadrate, deren Unterſchied 12 iſt. Man ſetze das eine $= x^2$, das zweite $= x^2 + 6x + 9$, ſo hat man $x^2 + 12 = x^2 + 6x + 9$, folglich $x = \frac{1}{2}$, und die beiden Quadrate ſind alſo $\frac{1}{4}$

und $\frac{49}{4}$, deren Unterſchied wirklich $=12$ iſt. Hierauf ſetze man wieder das eine Quadrat $=x^2$, das zweite $=x^2+4x+4$, ſo wird $x^2+12=x^2+4x+4$, alſo $x=2$, und die beiden Quadrate ſind nunmehr 4 und 16, deren Unterſchied abermals 12 iſt.

Der berichtigte Anſatz führt wieder darauf, daß x^2+12 ein Quadrat ſein ſolle, und Diophantus ſetzt daher $x^2+12=(x+3)^2$. Eben dieſes Anſatzes hatte er ſich aber auch bedient, um den Coefficienten $\frac{1}{4}$ zu beſtimmen, daher wird x abermals $=\frac{1}{2}$, und wir bekommen für zwei Zahlen den nämlichen Werth, nämlich 2. Dies konnte vermieden werden, wenn Diophantus für x^2+12 eine andere Wurzel wählte z. B. $x-5$. Denn nun wurde $x^2+12=x^2-10x+25$, und $x=\frac{13}{12}$. Auch ſieht man, daß ſtatt der Coefficienten 4 und $\frac{1}{4}$ unendlich viele andere auf dem gewöhnlichen Wege gefunden werden konnten.

XIII.

Der urſprüngliche Anſatz führt darauf, daß $266x^2-10$ ein Quadrat werden ſoll, was nicht möglich iſt, weil $266=14.19$ kein Quadrat iſt. Die beiden Zahlen 14 und 19 haben alſo nur eine Eigenſchaft, wodurch ſie zu Coefficienten der erſten und zweiten Zahl brauchbar werden, nämlich die, daß ſie ein Quadrat zum Reſte laſſen,

wenn man 10 davon abzieht; es fehlt ihnen aber die gleichfalls nothwendige Eigenſchaft, daß ihr Produkt ein Quadrat ſei; aber beide Bedingungen werden erfüllt, wenn man zu Coefficienten der erſten und dritten Zahl zwei Quadrate ſucht, die auch dann noch Quadrate bleiben, wenn man 10 davon abzieht.

Dieſe beiden Quadrate konnten vermittelſt des oft erwähnten Verfahrens gefunden werden. Diophantus findet aber das erſte vermittelſt eines Lehnſatzes, der ſich leicht durch eine Formel beweiſen läßt. Wenn man nämlich $\frac{a+1}{2}$ in's Quadrat erhebt, ſo erhält man $\frac{a^2+2a+1}{4}$; zieht man davon $a=\frac{4a}{4}$ ab, ſo iſt der Reſt $\frac{a^2-2a+1}{4}$ ebenfalls ein Quadrat. Da hier $a=10$ iſt, ſo findet Diophantus durch das angedeutete Verfahren die Quadrate $\frac{121}{4}$ und $\frac{81}{4}$, und beſtimmt $\frac{121}{4}$ oder $30\frac{1}{4}$ zum Coefficienten der erſten Zahl. Den Coefficienten der dritten Zahl ſetzt er aber $=x^2$. Nun ſoll x^2-10 ein Quadrat ſein; man ſetze daher $x^2-10=(x-2)^2$, ſo wird $x=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$.

Nach dieſer Berichtigung des Anſatzes hat es keine Schwierigkeit, die Hauptaufgabe zu löſen. Iſt nämlich die erſte Zahl $\frac{121}{4}x$, die zweite $\frac{1}{x}$, die dritte $\frac{49}{4}x$, ſo wird das Produkt der erſten und zweiten Zahl $\frac{121}{4}$, das

Pro-

Produkt der zweiten und dritten Zahl $\frac{49}{4}$, alſo in beiden Fällen ein Quadrat, welches, um die Zahl 10 vermindert, noch immer ein Quadrat bleibt. Das Produkt der erſten und dritten Zahl wird $\frac{121 \cdot 49}{4 \cdot 4}x^2$, und da dieſer Coefficient ein Quadrat iſt, ſo hat es keine Schwierigkeit die Zahl $\frac{121 \cdot 49}{4 \cdot 4}x^2 - 10$, oder was einerlei iſt, $121 \cdot 49x^2 - 160$ zu einem Quadrat zu machen.

XIV.

Man ſoll hier einen Werth von x finden, für welchen ſowohl $10x+54$ als $10x+6$ ein Quadrat wird, d. h. wir haben hier die doppelte Gleichung. Diophantus zerfällt den Unterſchied der beiden Formeln d. i. die Zahl 48 in die Factoren 4 und 12; das Quadrat von der halben Summe dieſer Factoren iſt 64, das Quadrat ihrer halben Differenz 16. Man hat alſo nach II, 10 zwei Gleichungen.

1. $10x+54 = 64$; 2. $10x+6 = 16$,

und aus beiden findet man $x = 1$.

Statt des Quadrates x^2+6x+9 konnte jedes andere gewählt werden.

XV.

Die Auflöſung der doppelten Gleichung geſchieht auf folgende Art. Der Unterſchied der beiden Formeln,

welche Quadrate werden ſollen, iſt $16x+4$, und dieſer iſt in die Factoren $4x+1$ und 4 zerfällt worden.

Die halbe Summe der Factoren iſt $\frac{4x+5}{2}$, und das Quadrat davon $\frac{16x^2+40x+25}{4} = 4x^2+10x+\frac{25}{4}$; dieſen Ausdruck ſetze man dem größeren Quadrate gleich, ſo erhält man

$$4x^2+15x = 4x^2+10x+\frac{25}{4}, \text{ und } x = \frac{25}{20}.$$

Dieſe Gleichung würde ſich aber gar nicht auflöſen laſſen, wenn nicht $4x^2$ ſich gegen $4x^2 = \frac{16x^2}{4}$ aufhöbe. Man bemerke daher folgendes: Bei dem Ausdruck für die zweite Zahl $(x+4)$ iſt die Zahl 4 zwar willkührlich, aber ſie muß nothwendig ein Quadrat ſein, damit in dem Produkte der zweiten und dritten Zahl, ferner in dem Produkte der erſten und dritten Zahl, x^2 eine Quadratzahl zu ihrem Coefficient erhalte, und auch der Coefficient von x in dem Reſte $16x+4$ eine Quadratzahl ſei. Ferner muß man dieſen Reſt ſo zerfällen, daß in der Summe der Factoren die doppelte Wurzel des in den beiden Producten enthaltenen Quadrats vorkommt. In unſerem Falle erhalten beide Produkte das Quadrat $4x^2$, folglich muß man $16x+3$ ſo zerfällen, daß in der Summe beider Factoren $4x$ vorkommt, den nur auf dieſem Wege wird auch in dem Quadrat der halben Summe, oder des halben Unterſchiedes der Factoren $4x^2$ vorkommen, und beide Quadrate ſich gegen einander heben.

Um die Sache noch deutlicher einzuſehen, wähle man ein anderes Beiſpiel. Die erſte Zahl ſei x, die zweite $x+9$, die dritte $9x$. Nun iſt das Produkt der beiden erſten x^2+9x; zieht man davon die dritte Zahl $9x$ ab, ſo bleibt x^2, und eine Bedingung iſt alſo bereits erfüllt. Das Produkt der zweiten und dritten Zahl iſt $9x^2+81x$, folglich ſoll $9x^2+81x-x=9x^2+80x$ ein Quadrat ſein. Das Produkt der erſten und dritten Zahl iſt $9x^2$, folglich ſoll auch $9x^2-x-9$ ein Quadrat ſein. Der Unterſchied beider Ausdrücke aber iſt $81x+9$.

Dadurch daß man die zweite Zahl $=x+9$ ſetzte, hat man alſo ſchon den Vortheil erreicht, daß in den beiden Quadraten der Coefficient von $9x^2$, in dem Reſte aber der Coefficient von $81x$ Quadratzahlen ſind; aber man würde die doppelte Gleichung nicht auflöſen können, wenn nicht in dem Quadrat, welches man dem vorliegenden Ausdruck gleich ſetzen will, ebenfalls $9x^2$ vorkäme. Man kann daher den Reſt $81x+9$ nicht willkührlich z. B. in $9x+1$ und in 9 zerfällen, ſondern da $9x^2$ zu ſeiner Wurzel $3x$ hat, ſo muß man die Zerfällung ſo einrichten, daß in der Summe und in der Differenz der Factoren $6x$ vorkomme, d. h. man muß $81x^2+9$ in die Factoren $6x+\frac{2}{3}$ und $13\frac{1}{2}$ zerfällen.

Denn nun wird die Summe der Factoren $\frac{6x+14\frac{1}{6}}{2}$, das Quadrat alſo $(36x^2+170x+\frac{7225}{36}):4$ oder

$9x^2+\frac{170}{4}x+\frac{7225}{9}$; die halbe Differenz der Factoren iſt $\frac{6x-12\frac{5}{6}}{2}$, das Quadrat davon $\left(36x^2-154x+\frac{5929}{36}\right):4$, oder $9x^2-\frac{154}{4}x+\frac{5929}{9}$. Man hat alſo die Gleichungen

$$1.\quad 9x^2+\frac{170}{4}x+\frac{7225}{9}=9x^2+80x.$$

$$2.\quad 9x^2-\frac{154}{4}x+\frac{5929}{9}=9x^2-x-9,$$

ſo daß ſich in beiden Gleichungen $9x^2$ heben läßt.

XVI.

Man ſetze die erſte Zahl $=\frac{1}{4}ax$, die zweite $=ax+b$, die dritte $=\frac{1}{4}b^2$, ſo werden alle Mal zwei Bedingungen erfüllt, welchen Werth man für a und b auch ſetzen mag.

Die gefundenen Zahlen ſind eigentlich $\frac{9}{73}$, $\frac{328}{73}$ und 1, es iſt aber erlaubt dieſe Zahlen mit 73 zu multipliciren oder zu dividiren, denn das iſt eben ſo viel, als hätte man a oder b, 73 Mal größer genommen. Daher konnte man noch die Bedingung hinzufügen, daß die drei Zahlen eine vorgeſchriebene Summe haben ſollte. In dieſem Falle müßte man die erſte Zahl $=9x$, die zweite $=328x$, die dritte $=73x$, die Summe der drei Zahlen aber, d. i. $(328+73+9)x$ der vorgeſchriebenen Summe gleich ſetzen.

XVII.

Der Lehnſatz, aus welchem Diophantus den Anſatz herleitet, läßt ſich leicht durch eine Formel beweiſen. Da a und $a+1$ zwei auf einander folgende Zahlen ſind, ſo ſind a^2 und a^2+2a+1 zwei auf einander folgende Quadrate. Man addire zu dem Produkte beider ihre Summe, ſo erhält man $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$, alſo das Quadrat von a^2+a+1.

Die beiden Formeln, die man zu Quadraten machen ſoll, ſind $10x+9$ und $5x+4$; der Unterſchied beider iſt $5x+5$. Dieſen zerfälle man in die Factoren 5 und $x+1$, ſo iſt die halbe Differenz der Factoren $\frac{1}{2}x-2$, und man erhält daraus

$$5x+4=\frac{1}{4}x^2-2x+4.$$

Die Auflöſung wird aber nur dadurch möglich, daß ſich an beiden Seiten die beſtimmte Zahl 4 hebt, wodurch die Gleichung in eine einfache verwandelt wird, und dies mußte bei der Zerfällung des Unterſchiedes $5x+5$ berückſichtigt werden.

Wenn man nämlich die erſte Zahl $=a^2$, die zweite $=a^2+2a+1$, die dritte $=x$ ſetzt, ſo muß man x ſo beſtimmen, daß ſowohl $(a^2+2a+2)x+a^2+2a+1$, als a^2x+x+a^2 ein Quadrat wird. Der Unterſchied beider Formeln hat alſo immer die Form $(2a+1)x+2a+1$, und dieſen muß man immer in zwei Factoren von der Form $2a+1$ und $x+1$ zerfällen, denn nun wird die

halbe Differenz $\frac{1}{2}x - a$, die halbe Summe $\frac{1}{2}x + a + 1$. Man erhält alſo

$$\frac{1}{4}x^2 - ax + a^2 = a^2x + x + a^2,$$

folglich $x = 4(a^2 + a + 1)$, oder wenn $a^2 = 4$, $x = 4.7 = 28$.

XVIII. — XIX.

Wenn man die erſte Zahl $= 5\frac{1}{2}$, die zweite $= 3$, die dritte aber $= x$ ſetzt, ſo kommt es dahin, daß man die Formeln $6\frac{1}{1}x + 5\frac{1}{2}$ und $4x + 3$ zu Quadraten machen ſoll. Dies wäre nun vermittelſt der doppelten Gleichung ſehr leicht zu erreichen, wenn entweder die Coefficienten von x in beiden Formeln gleich wären, denn in dieſem Falle wäre der Unterſchied beider Formeln die beſtimmte Zahl $2\frac{1}{2}$, oder auch wenn in beiden Formeln die beſtimmten Zahlen $5\frac{1}{2}$ und 3 einander gleich wären, denn in dieſem Falle wäre der Unterſchied beider Formeln $= 2\frac{1}{2}x$.

Die vorläufig geſuchten Zahlen $5\frac{1}{2}$ und 3 haben daher zwar eine Eigenſchaft, durch welche ſie der Aufgabe genügen, nämlich die, daß ihr Produkt und ihre Summe zuſammen genommen ein Quadrat giebe; die Aufgabe verlangt aber auch, daß ſowohl $5\frac{1}{1}x + x + 5\frac{1}{2} = \left(5\frac{1}{2} + 1\right)x + 5\frac{1}{2}$ als $3x + x + 3 = (3+1)x + 1$ ein Quadrat werde. Da die beiden erſten Zahlen $5\frac{1}{2}$ und 3

einander ungleich ſind, und ſein mußten, ſo kann die doppelte Gleichung nicht auf dem bisher betrachteten Wege gelöſ't werden; wohl aber wird die Auflöſung möglich, wenn ſich die Coefficienten von x d. h. $5\frac{1}{2}+1$ und $3+1$, oder die um 1 vergrößerte erſte und zweite Zahl, wie zwei Quadrate verhalten, oder was einerlei iſt, wenn ihr Produkt ein Quadrat iſt. Man muß alſo ſtatt $5\frac{1}{2}$ und 3 zwei Zahlen ſuchen, welche außer der früher angeführten, auch noch die letztere Eigenſchaft haben.

Wenn man die eine Zahl $=x$, die andere $=4x+3$ ſetzt, ſo iſt klar, daß der letzten Bedingung Genüge geſchieht, denn die Zahlen $x+1$ und $4x+4$ verhalten ſich offenbar, wie die Quadratzahlen 1 und 4; dieſe Bedingung wird aber jedes Mal erreicht, wenn man die eine Zahl $=x$, die andere $=x+(a^2-1)$ ſetzt. Diophantus berechnet aus dem gemachten Anſatz, daß die eine Zahl $\frac{3}{10}$, die andere $=4\frac{1}{5}$ ſein müſſe, wofür wir der leichtern Ueberſicht wegen, die allgemeinen Zeichen **a** und **b** ſetzen wollen.

Setzt man nun die dritte Zahl $=x$, ſo ſoll man ſowohl $ax+x+a=(a+1)x+a$, als auch $bx+x+b=(b+1)x+b$ zu einem Quadrat machen. Wenn man aber jeder dieſer Formeln durch irgend ein Quadrat multiplicirt oder dividirt, und die dadurch entſtandene Formel zu einem Quadrat macht, ſo wird offenbar auch die urſprüngliche Formel ein Quadrat. Man nehme daher

zwei Quadrate, welche ſich wie 1:4 verhalten z. B. 25 und 100, oder allgemein c^2 und $4c^2$, und multiplicire die Formel, in welcher x den kleineren Coefficienten hat, mit $4c^2$, die zweite, in welcher x den größeren Coefficienten $(b+1)$ hat, mit c^2, ſo werden in beiden die Coefficienten von x, nämlich $c^2(b+1)$ und $4c^2(a+1)$ einander gleich, da $b+1$ der Annahme nach $=4.(a+1)$ iſt. Nimmt man alſo die Differenz der beiden Formeln, ſo heben ſich die Glieder, worin x vorkommt, und die Differenz wird eine beſtimmte Zahl, in dem vorliegenden Falle 75. Zerfällt man dieſen Unterſchied in 25×3, ſo iſt die halbe Summe der Factoren $=14$, die halbe Differenz $=11$, man hat alſo in beſtimmten Zahlen die beiden Gleichungen

1. $130x+105=196$, 2. $130x+30=121$.

Aus beiden aber folgt $x=\frac{91}{130}=\frac{7}{10}$.

Der Gang in der XIX. Aufgabe iſt dem in der vorigen völlig gleich, und hat überall keine Schwierigkeit, wenn man die Gründe der vorigen Auflöſung eingeſehen hat.

XX. — XXI.

In dieſer Aufgabe ſoll man die Formeln $4x^2+3x-1$ und $4x^2+4x-1$ zu Quadraten machen. Diophantus zerfällt den Unterſchied der Formeln, oder x, in die Factoren 4x und . Dieſe Zerfällung iſt keinesweges willkührlich, denn da beide Formeln ein Glied $4x^2$

enthalten, ſo mußte der eine Factor nothwendig $4x$ ſein, damit in der halben Summe oder Differenz der Factoren ein Glied $2x$, alſo in dem Quadrat der halben Summe oder Differenz ein Glied $4x^2$ vorkomme. Die halbe Summe der Factoren wird übrigens $2x+\frac{1}{8}$, die halbe Differenz $2x-\frac{1}{8}$, man erhält alſo die beiden Gleichungen

$$1.\ 4x^2+3x-1=\left(2x-\frac{1}{8}\right)^2=4x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{64}.$$

$$2.\ 4x^2+4x-1=\left(2x+\frac{1}{8}\right)^2=4x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{64}.$$

und aus beiden ergiebt ſich $x=\frac{65}{224}$.

Auch bei der XXI. Aufgabe iſt für die Zerfällung des Reſtes $4x$ die vorhin erläuterte Regel zu beobachten.

XXII.

Zur Auflöſung dieſer ſehr ſchönen Aufgabe bedient ſich Diophantus zum erſten Male des rechtwinkligen Dreiecks. Auflöſungen dieſer Art kommen im fünften Buche mehre vor, und es ſcheint, daß die gegenwärtige Aufgabe durch den Sammler an einen unrechten Platz geſtellt worden iſt. Wir wollen die verſchiedenen Punkte, welche hier zu erläutern ſind, einzeln durchgehen.

1) In jedem rechtwinkligen Dreieck bleibt das Quadrat der Hypotenuſe auch dann noch ein Quadrat, wenn man das doppelte Produkt der Katheten dazu addirt,

oder davon abzieht. Wenn nämlich die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Zahlen a und b ausgedrückt werden, ſo iſt das Quadrat der Hypotenuſe $=a^2+b^2$, das doppelte Produkt der Katheten $=2ab$, nun iſt aber ſowohl $a^2+2ab+b^2$ als $a^2+-2ab+b^2$ das vollſtändige Quadrat einer zweitheiligen Größe, alſo der Satz als richtig bewieſen.

2) Um vier rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Hypotenuſe zu erhalten, konnte Diophantus, wie er ſelbſt angiebt, ein beliebiges Quadrat als das Quadrat der Hypotenuſe anſehen, und dieſes nach den früher entwickelten Regeln auf vier verſchiedene Arten in zwei Quadrate theilen, und die Wurzeln dieſer Quadrate als die Katheten der Dreiecke anſehen. Da dies Verfahren aber in der Regel auf Brüche führt, ſo wählt Diophantus ein anderes höchſt ſinnreiches Verfahren, um vier rechtwinklige Dreiecke zu erhalten, deren Hypotenuſen gleich ſind, und deren Seiten ſich durch ganze Zahlen ausdrücken laſſen.

3) Wenn die Seiten eines Dreiecks durch die Zahlen 3, 4 und 5, oder durch die Zahlen 5, 12 und 13 vorgeſtellt werden können, ſo ſind beide Dreiecke rechtwinklig, weil $3^2+4^2=5^2$, und $5^2+12^2=13^2$ iſt. Multiplicirt man nun die Seiten des erſten Dreiecks mit 13, die des zweiten mit 5 ſo iſt unmittelbar deutlich, daß die Hypotenuſe in beiden gleich werden muß, die neuen Dreiecke aber, deren eines durch die Zahlen 39, 52, 65, das andere durch die Zahlen 25, 60, 65

vorgeſtellt wird, den vorigen ähnlich, alſo wie dieſe rechtwinklig ſind.

4) Die Zahl 65* gewährt nun die Bequemlichkeit, daß ſie ſich ohne alle Rechnung auf doppelte Art in zwei Quadrate, zuerſt nämlich in 16 und 49 und dann in 64 und 1 theilen läßt, und aus den Wurzeln dieſer Quadrate bildet Diophantus die beiden noch fehlenden Dreiecke. Wenn man aber aus zwei Zahlen z. B. 4 und 7 ein Dreieck bilden ſoll, ſo heißt das: man ſoll die Summe ihrer Quadrate als Hypotenuſe, die Differenz ihrer Quadrate als die eine, das doppelte Produkt derſelben als die zweite Kathete anſehen. Aus den Zahlen 4 und 7 erhält man alſo die Hypotenuſe $=4^2+7^2=65$, die eine Kathete $7^2-4^2=33$, die zweite Kathete $=2\times4\times7=56$. Aus den Zahlen 8 und 1 erhält man aber die Hypotenuſe $8^2+1^2=65$, die eine Kathete $=8^2-1^2=63$, und die andere Kathete $=2\times 8.\times 1=16$, und es iſt unmittelbar aus dem ganzen Verfahren klar, daß auch dieſe beiden letzten Dreiecke nothwendig 65 zu ihrer Hypotenuſe erhalten mußten.

5) Nach dieſen vorläufigen Rechnungen muß, in Beziehung auf den zu Anfang angeführten Lehnſatz, der Anſatz ſo gemacht werden, daß die Summe der vier Zahlen 65x wird, jede einzelne Zahl aber das doppelte Produkt zweier Katheten, oder was einerlei iſt, die vierfache Fläche des Dreiecks zu ihrem Coefficienten erhält, denn auf dieſe Weiſe werden alle vier Bedingungen der Aufgabe auf ein Mal erreicht.

6) Ueber die Zahl 65 bemerkt Diophantus noch, ſie laſſe ſich deßhalb auf doppelte Weiſe in zwei Quadrate zerlegen, weil jeder von den Factoren 5 und 13 ſelbſt ſchon die Summe zweier Quadrate ſei. Von dieſem Satz kann man folgenden allgemeinen Beweis geben.

Man multiplicire die Summe zweier Quadrate a^2+b^2 mit der Summe zweier anderen Quadrate c^2+d^2, ſo erhält man $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$, und es iſt zu zeigen, daß ſich dieſes Produkt auf doppelte Art in zwei Quadrate in ganzen Zahlen zerſtückeln laſſe. Man ziehe aus den einzelnen Gliedern die Wurzel, und mache das Quadrat von der Summe zweier, jedoch ſo, daß in der Summe keine der Größe a, b, c und d zwei Mal vorkommt, hierauf mache man auch das Quadrat von der Differenz der beiden übrigen, und addire beide Quadrate, ſo erhält man das vorige Produkt wieder. Durch dies Verfahren wird alſo das obige Produkt in zwei Quadrate zerſtückelt, und das Verfahren läßt ſich zwei Mal auf verſchiedene Weiſe wiederholen. Bezeichnen wir nämlich das Produkt der Kürze wegen durch P, ſo iſt

1. $P=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2.$

2. $P=(bc+ad)^2+(ac-bd)^2=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2.$

Dieſe beiden Formeln zeigen nicht nur die Richtigkeit der Behauptung, ſondern ſie geben auch an, auf welche Weiſe eine Zahl von der vorausgeſetzten Beſchaffenheit in zwei Quadrate in ganzen Zahlen zerſtückelt

werden müſſe. Daß man nicht eine dritte oder vierte Zerſtückelung, z. B. $(ac+ad)^2-(bc-bd)^2$ vornehmen könne, ſieht man daraus, daß ſich in dieſem Fall die doppelten Produkte nicht gegen einander aufheben.

XXIII. — XXIV.

Von beiden Aufgaben haben wir ſchon im zweiten Buche (15 und 16) eine Auflöſung gehabt, und es iſt wohl nur ein Verſehen des Sammlers, daß dieſe Aufgaben hier wiederholt werden.

Anmerkungen zum vierten Buche.

I. II.

In der erſten Aufgabe ſei die gegebene Zahl, d. i. die Summe der geſuchten Cubi $=S$, die Summe ihrer Wurzeln aber $=s$. Setzt man nun den halben Unterſchied beider Wurzeln $=x$, ſo iſt die größere $=x+\frac{1}{2}s$, die kleinere $=\frac{1}{2}s-x$. Die Summe beider Cubi iſt daher $3sx^2+\frac{1}{4}s^3$, daher wird

$$3sx^2+\frac{1}{4}s^3=S, \text{ und } x=\sqrt{\frac{S-\frac{1}{4}s^3}{3s}}.$$

In der zweiten Aufgabe ſei der vorgeſchriebene Unterſchied der Cubi $=D$, der vorgeſchriebene Unterſchied ihrer Wurzeln $=d$. Setzt man nun die halbe Summe der beiden Wurzeln $=x$, ſo iſt die größere $=x+\frac{1}{2}d$, die kleinere $=x-\frac{1}{2}d$; daraus aber findet man den Unterſchied der Cubi

$$3dx^2+\frac{1}{4}d^3=D, \text{ und } x=\sqrt{\frac{D-\frac{1}{4}d^3}{3d}}.$$

Bachet ſchaltet hier noch folgende verwandte Aufgaben ein:

1. Man ſucht zwei Kubikzahlen deren Summe dem Unterſchiede zweier gegebenen Kubikzahlen gleich iſt, oder: man ſoll die Differenz zweier Kubikzahlen wieder in zwei Kubikzahlen theilen.
2. Man ſucht zwei Kubikzahlen, deren Differenz der Summe zweier gegebenen Kubikzahlen gleich iſt.
3. Man ſucht zwei Kubikzahlen, deren Differenz der Differenz zweier gegebenen Kubikzahlen gleich iſt.
4. Man ſucht zwei Zahlen von der Beſchaffenheit, daß ſowohl die Summe ihrer Cubi als ihr Produkt zweien gegebenen Zahlen gleich wird.
5. Man ſucht zwei Zahlen von der Beſchaffenheit, daß die Differenz ihrer Cubi und ihr Produkt zweien gegebenen Zahlen gleich wird.

Die Auflöſungen, welche Bachet von dieſen Aufgaben mittheilt, ſind zwar nicht allgemein, aber ganz im Geiſt des Diophanthus, und da die erſte derſelben bei der XIX. Aufgabe des fünften Buches als Lehnſatz gebraucht wird, ſo will ich hier eine allgemeine Auflöſung derſelben mittheilen, aus welcher zugleich hervorgeht, wie auch die zweite und dritte Aufgabe zu löſen iſt.

Wenn die gegebenen Kubikzahlen allgemein durch a^3 und b^3 bezeichnet werden, ſo kommt es darauf an, zwei Kubikzahlen zu finden, deren Summe $= a^3 - b^3$ ſei. Man ſetze die Wurzel der einen $= a - x$, die Wur-

zel der zweiten $=nx-b$, wo n zuerſt noch unbeſtimmt bleiben mag. Nun iſt die Summe beider Cubi $=(n^3-1)x^3-(3bn^2-3a)x^2+(3b^2n-3a^2)x+a^3-b^3$.

Setzt man dieſe Summe der Differenz a^3-b^3 gleich, und zieht an beiden Seiten a^3-b^3 ab, ſo wird $(n^3-1)x^3-(3bn^2-3a)x^2+(3b^2n-3a^2)x=0$.

Dieſe kubiſche Gleichung läßt ſich durch die Diviſion mit x^2 in eine einfache verwandeln, wenn man vorher n ſo beſtimmt hat, daß das dritte Glied ganz verſchwindet, oder daß $3b^2n-3a^2=0$ wird, welches geſchieht, wenn $b^2n=a^2$, alſo $n=\frac{a^2}{b^2}$ wird. Unter dieſer Vorausſetzung wird nämlich

$$x=\frac{3(bn^2-a)}{n^3-1}.$$

Da n alle Mal größer als 1 iſt, ſo erhält x alle Mal einen poſitiven Werth; ſoll aber der Werth von x für unſeren Zweck brauchbar ſein, ſo muß auch

1. nx größer als b,

2. a größer als x

ſein, weil man ſonſt für die Wurzeln $nx-b$ und $a-x$ einen negativen Werth erhalten würde. Um zu prüfen, ob und unter welchen Umſtänden die beiden obigen Bedingungen Statt finden werden, ſo ſetze man für n den Werth $\frac{a^2}{b^2}$, ſo wird $x=\frac{3b^3a^4-3ab^6}{a^6-b^6}$. Nimmt man nun an, daß nx größer als b ſei, ſo iſt auch

$$\frac{3b^3a^6-3a^3b^6}{a^6b^2-b^8}>b.$$

Man

Man multiplicire an beiden Seiten mit $a^6 b^2 - b^8$, und dividire durch b^3, ſo wird

$$3a^6 - 3a^3 b^3 > a^3 - b^3.$$

Man dividire endlich durch $a^3 - b^3$, ſo wird

$$3a^3 > a^3 + b^3.$$

Da das Letztere alle Mal der Fall iſt, wenn nur, wie wir vorausgeſetzt haben, $a > b$ iſt, ſo iſt auch nx alle Mal größer als b, und $nx - b$ alle Mal poſitiv.

Um die zweite Bedingung zu prüfen, nehme man wieder an, es ſei a größer als x, d. h.

$$a > \frac{5b^3 a^4 - 3ab^6}{a^6 - b^6}.$$

Man multiplicire beide Seiten durch $a^6 - b^6$, und dividire durch a, ſo wird

$$a^6 - b^6 > 3b^3 a^3 - 3b^6.$$

Man dividire ferner durch $a^3 - b^3$, ſo wird

$$a^3 + b^3 > 3b^3, \text{ oder } a^3 > 2b^3.$$

Da das Letztere nicht nothwendig der Fall iſt, ſo fügt Bachet der Aufgabe die Bedingung bei, daß die größere Kubikzahl größer ſein müſſe als das Doppelte der kleinern.

Fermat zeigt aber auf eine höchſt ſinnreiche Art, daß man dieſe Bedingung umgehen könne. Wenn z. B. 64 und 125 die gegebenen Cubi ſind, ſo iſt der größere zwar kleiner, als das Doppelte des kleineren; man kann aber nach der dritten Bachetſchen Aufgabe ein Paar

Kubikzahlen ſuchen, deren Differenz der Differenz 125 — 64 gleich iſt, und welche ſo beſchaffen ſind, daß die groͤßere von beiden groͤßer iſt, als das Doppelte der kleineren, und wir wollen dieſe durch c^3 und d^3 bezeichnen.

Nun kann man nach der erſten Aufgabe zwei Kubikzahlen ſuchen, deren Summe $= c^3 - d^3$, weil bei dieſen die verlangte Bedingung zutrifft. Hat man aber zwei Kubikzahlen, deren Differenz $= c^3 - d^3$, ſo iſt ihre Differenz auch 125 — 64, weil nach dem Verfahren $125 - 64 = c^3 - d^3$ ſein ſoll, und man kann alſo die Differenz der Kubikzahlen 125 und 64 wirklich in zwei Kubikzahlen theilen, ungeachtet die gegebenen Zahlen nicht der oben entwickelten Bedingung genuͤgen.

Fuͤr die vierte und fuͤnfte der Bachetſchen Aufgaben laͤßt ſich ſehr leicht eine allgemeine Aufloͤſung angeben. Sucht man z. B. zwei Zahlen z und x von der Beſchaffenheit, daß das Produkt derſelben $= p$, die Summe ihrer Cubi aber $= s$ wird, ſo hat man folgende zwei Gleichungen

$$1.\ zx = p. \quad 2.\ x^3 + z^3 = s.$$

Aus beiden folgt aber die beſtimmte Gleichung

$$s - z^3 = \frac{p^3}{z^3}$$

oder, wenn man die Gleichung gehoͤrig einrichtet,

$$z^6 - sz^3 = -p^3.$$

Betrachtet man in dieſer Gleichung z^3 als die geſuchte Groͤße, ſo laͤßt ſie ſich ganz wie eine ver-

miſchte quadratiſche Gleichung behandeln, und man findet

$$1.\ z^3 = \frac{1}{2}s \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}s^2 - p^3\right)}$$

$$2.\ x^3 = s - z^3.$$

IV — V.

Man ſetze das geſuchte Quadrat $=x^2$, alſo die Wurzel deſſelben $=x$; die Zahl aber, die man zu beiden addiren muß, ſei $=(n^2-1)x^2$. Addirt man dieſe Zahl zu x^2, ſo erhält man zur Summe n^2x^2, und eine Bedingung der Aufgabe iſt alſo bereits erfüllt.

Nun ſoll aber $(n^2-1)x^2+x$ die Wurzel von n^2x^2 ſein, folglich wird

$$(n^2-1)x^2+x = nx,\ \text{alſo}\ x = \frac{n-1}{n^2-1}.$$

In der V. Aufgabe ſei das geſuchte Quadrat wiederum $=x^2$, alſo die zugehörige Wurzel $=x$; die Zahl aber, die man zu beiden addiren muß, ſei $=n^2x^2-x$, ſo wird die eine Bedingung der Aufgabe durch den bloßen Anſatz erfüllt, da die Summe der Wurzel x und der Zahl $n^2x^2-x=n^2x^2$ wird. Nun ſoll aber auch $x^2+n^2x^2-x=(n^2+1)x^2-x$ die Wurzel von n^2x^2 ſein. Man ſetze daher

$$(n^2+1)x^2-x = nx,\ \text{ſo wird}\ x = \frac{n+1}{n^2+1},$$

eine Formel, welche ſich von der vorigen bloß durch die Vorzeichnung unterſcheidet.

VI.

Der Coefficient des Quadrats, welches zu den beiden anderen Zahlen addirt werden ſoll, muß gleich beim Anſatz ſo gewählt werden, daß die Summe dieſes Coefficienten und des Coefficienten in dem andern Quadrat (9) wieder eine Quaratzahl wird. Dies bewirkt Diophantus, indem er nach II. 11 ein Quadrat ſucht, welches, zu 9 addirt, wieder ein Quadrat zur Summe giebt.

VII.

Die ganze Auflöſung beruht darauf, daß man zwei Zahlen ſuche, deren doppeltes Produkt ein Quadrat iſt z. B. x und $\frac{1}{2}a^2x$. Nun iſt die Summe ihrer Quadrate $=\left(\frac{1}{4}a^4+1\right)x^2$, das doppelte Produkt $=a^2x^2$; man ſetze alſo die erſte Zahl $=\left(\frac{1}{4}a^4+1\right)x^2$, die dritte $=a^2x^2$ ſo wird die zweite

$$=\left(\frac{1}{4}a^4+1\right)x^2-a^2x^2=\left(\frac{a^4-4a^2+4}{4}\right)x^2,$$

und dieſe Zahlen leiſten ſchon durch ihre bloße Form einer Bedingung der Aufgabe Genüge. Nun ſoll aber die erſte Zahl auch noch ein Cubus ſein, man ſetze daher

$$\left(\frac{1}{4}a^4+1\right)x^2=x^3,\ \text{ſo wird } x=\frac{1}{4}a^4+1.$$

VIII.

Die vorläufige Aufgabe verlangt, zwei Quadrate von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß die Summe bei-

der, um eines von beiden vermehrt, wieder ein Quadrat wird, d. h. wenn man das eine $=a^2$, das andere $=x^2$ ſetzt, ſo ſoll $2x^2+a^2$ wieder ein Quadrat ſein. Setzt man

$$2x^2+a^2=(2x-a)^2=4x^2-4ax+a^2$$

ſo wird $x=2a$, und $x^2=4a^2$

Wenn man alſo zwei Quadrate wählt, welche ſich wie 1:4 verhalten, ſo haben dieſe immer die verlangte Eigenſchaft, und nunmehr ſind wir im Stande, die Coefficienten in der Hauptaufgabe ſo zu beſtimmen, daß eine Bedingung durch den bloßen Anſatz erfüllt wird.

Man ſetzt nämlich die dritte Zahl $=4a^2x^2$, die zweite $=a^2x^2$, die erſte alſo, als die Summe von beiden, $=5a^2x^2$. Da dieſe Zahl ein Cubus ſein ſoll, ſo ſetze man

$$5a^2x^2=x^3, \text{ ſo wird } x=5a^2,$$

und nunmehr können wir den Zahlenwerth von $5a^2x^2$, a^2x^2, $4a^2x^2$ leicht berechnen. Da man die Zahl a vollkommen willkührlich nehmen darf, ſo iſt die Zahl der Auflöſungen unendlich.

IX.

Die vorläufige Aufgabe, welche hier zu löſen iſt, kann allgemein ſo ausgedrückt werden:

man ſoll zwei Kubikzahlen ſuchen, deren Differenz ein Quadrat iſt, und deren Wurzeln ebenfalls um ein Quadrat verſchieden ſind.

Man ſetze die Wurzel des erſten Cubi $=x$, die des zweiten $=x+a^2$, ſo iſt die Differenz der Cubi

$=3a^2x^2+3a^4x+a^6$. Da dieſe Differenz ein Quadrat ſein ſoll, ſo ſetze man

$3a^2x^2+3a^4x+a^6=(2ax-a^3)^2=4a^2x^2-4a^4x+a^6$, wodurch man $x=7a^2$ findet. Die eine Zahl iſt alſo $7a^2$, die andere $8a^2$, d. h. wenn man von einem beliebigen Quadrat das Siebenfache und das Achtfache nimmt, ſo haben die Cubi dieſer Zahlen die verlangte Eigenſchaft. Es ſei z. B. $a^2=4$, ſo iſt $7a^2=28$, und $8a^2=32$. Nun iſt $32^3=32768$, $28^3=21952$, folglich der Unterſchied beider Cubi $10816=104^2$, die Differenz der Wurzeln iſt aber 4, und es werden alſo beide Bedingungen erfüllt.

X.

Um die vorläufige Aufgabe allgemein zu löſen, ſetze man die Summe der Wurzeln $=a$, die eine Wurzel $=x$, folglich die andere $=a-x$. Nun iſt die Summe beider Cubi $=3ax^2-3a^2x+a^3$, und die Aufgabe verlangt, daß a und $3ax^2-3a^2x+a^3$, oder, was einerlei iſt, 1 und $3x^2-3ax+a^2$ ſich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten. Da nun 1 ein Quadrat iſt, ſo muß auch $3x^2-3ax+a^2$ ein Quadrat ſein; die Wurzel dieſes Quadrats muß aber in jedem Falle ein Glied a enthalten, damit in dem Quadrat a^2 vorkomme; man ſetze alſo die Wurzel $=a-bx$, ſo wird

$$a^2-2abx+b^2x^2=3x^2-3ax+a^2,$$

und $x=\frac{2ab-3a}{b^2-3}$

Hiernach kann man beide Coefficienten leicht ſo

beſtimmen, daß ſie der vorläufigen Bedingung genügen. Diophantus multiplicirt die gefundenen Zahlen noch mit 13 und dividirt ſie dann mit 2, um ganze und möglichſt kleine Zahlen zu haben; Beides iſt erlaubt, da es das Verhältniß der beiden Zahlen zu einander nicht ändert.

XI.

Aus der Gleichung $637x^3 = 13x$ folgt zunächſt, wenn man durch x dividirt, $637x^2 = 13$, alſo $x^2 = \frac{13}{637}$. Nun läßt ſich Zähler und Nenner durch 13 dividiren, folglich wird $x^2 = \frac{1}{49}$, und $x = \frac{1}{7}$. Dieſe Auflöſung wäre in rationalen Zahlen nicht möglich, wenn nicht 637 : 13 ein Quadrat zum Quotienten gäbe. Daher ſieht man, weßhalb die Coefficienten 8 und 5 ſo beſtimmt werden mußten, daß die Summe der Cubi 637 durch die Summe der Wurzeln oder durch 13 dividirt, ein Quadrat zum Quotienten giebt.

Dieſe vorläufige Aufgabe iſt aber bei der vorigen Aufgabe ſchon gelöſ't worden, denn dort ſuchten wir zwei Cubi, die ſich wie zwei Quadrate gegeneinander verhalten, d. h. ſie mußten entweder ſelbſt Quadrate oder durch Multiplication zweier Quadrate mit derſelben ganzen oder gebrochenen Zahl entſtanden ſein. Nun iſt aber klar, daß, wenn man zwei Quadrate oder Gleichvielfache zweier Quadrate durch einander dividirt, der Quotient alle Mal ein Quadrat ſein müſſe, und daß daher die vorläufige

Aufgabe bei der X. und XI. Aufgabe nur im Ausdruck verſchieden ſei.

XIII.

Diophantus findet hier dieſelben Zahlen, welche er bei der XII. Aufgabe gefunden hat. Es läßt ſich aber leicht zeigen, daß zwei Zahlen, welche den Forderungen der XII. Aufgabe genügen, auch den Forderungen der gegenwärtigen Aufgabe genügen müſſen. Denn man nenne die beiden Cubi x^3 und z^3, ihre Wurzeln alſo x und z; wenn nun, wie die XI. Aufgabe verlangt, der Unterſchied der Cubi dem Unterſchiede der Wurzeln gleich iſt, ſo hat man

$$x^3 - z^3 = x - z,$$

d. h. die vier Zahlen bilden eine ſogenannte arithmetiſche Proportion; in einer ſolchen Proportion iſt aber die Summe der beiden äußeren Glieder der Summe der beiden mittleren Glieder gleich, alſo $x^3 + z = z^3 + x$, und das iſt die Forderung der gegenwärtigen Aufgabe.

XIV.

Nachdem die erſte Zahl $= 9x^2 + 6x$ geſetzt war, durfte die zweite nicht mehr willkührlich genommen, ſondern ſie mußte ſo beſtimmt werden, daß die Summe der erſten und zweiten, um 1 vermehrt, ein Quadrat wird. Zu dem Ende ſucht Diophantus (nach II, 11) ein Quadrat, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn

man $9x^2+6$ dazu addirt, und findet, daß $16x^2+24x+9$ dieſer Forderung genüge; denn wirklich iſt die Summe $25x^2+30x+9$ das Quadrat von $5x+3$. Wird nun die zweite Zahl $=16x^2+24x+8$ geſetzt, ſo werden durch den bloßen Anſatz drei Bedingungen erfüllt, und die vierte durch den für x berechneten Zahlenwerth ebenfalls erreicht.

XV.

Wenn man die drei Quadrate der Reihe nach durch A, B, C bezeichnet, ſo ſoll die Summe von $A-B$, $A-C$, $B-C = A+B+C$ ſein. Eben dieſe Summe iſt aber auch $=2A-2C = 2(A-C)$ d. h. ſie iſt dem doppelten Unterſchiede des größten und des kleinſten Quadrates gleich. Durch dieſe Betrachtung findet Diophantus für die mittelſte Zahl den allgemeinen Ausdruck x^2+2x-2, welcher von ſelbſt einen kleineren Werth giebt als x^2+2x+1. Da eben dieſer Ausdruck aber größer als 1, folglich x^2+2x größer als 3 ſein ſoll, ſo überſieht man ſogleich, daß auch x größer als 1 werden muß.

XVI.

Wenn der zuerſt gewählte Anſatz zweckmäßig ſein ſoll, ſo müſſen die allgemeinen Ausdrücke für das zweite und dritte Produkt, $25+\frac{250}{x^2}$ und $10+\frac{250}{x^2}$, nothwendig

dieſelbe Differenz geben, wie die beſtimmten Zahlen 32 und 27, denen dieſe Produkte gleich werden ſollen; weil man ſonſt für x nicht denſelben Werth erhalten würde. Daher muß man in den allgemeinen Formeln die Zahlen 25 und 10 anders beſtimmen, und zu dieſem Ende den allgemeinen Ausdruck für die erſte und zweite Zahl, $\frac{10}{x}$ und $\frac{25}{x}$, anders wählen.

Der berichtigte Anſatz führt auf zwei Gleichungen, welche beide denſelben Werth für x geben, denn man erhält

1. $15 + \frac{300}{x^2} = 27.$	1. $20 + \frac{300}{x^2} = 32$
2. $15x^2 + 300 = 27x^2$	2. $20x^2 + 300 = 32x^2$
3. $300 = 12x^2$	3. $300 = 12x^2$

$$4.\ x = \sqrt{\frac{300}{12}} = \sqrt{25} = 5.$$

Man überſieht leicht, daß in der letzten Formel die Zahl 300 das Produkt der beiden Stücke iſt, in welche man die Zahl 35 getheilt hat, 12 aber der Unterſchied zwiſchen dem größern Stück und der gegebenen Zahl 32; da nun die Theilung der Zahl 35 nicht gleichgültig iſt, ſondern der Unterſchied der beiden Stücke dem Unterſchiede der beiden andern gegebenen Zahlen gleich ſein muß, ſo hat man es nicht immer in ſeiner Gewalt, daß $\frac{300}{12}$ ein Quadrat werde, was doch erforderlich iſt, wenn x einen rationalen Werth erhalten ſoll.

XVII.

Die mittelſte Zahl kann ganz beliebig $= ax$ geſetzt werden, es iſt aber zweckmäßig, ſie ſo zu wählen, daß ſie ſich bequem in zwei Factoren zerfällen läßt.

Um nämlich die erſte Zahl zu finden, muß man ein Quadrat ſuchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man ax dazu addirt. Ein ſolches Quadrat findet man aber nach II. 11, wenn man ax in zwei Factoren zerfällt, und die halbe Differenz dieſer Factoren ins Quadrat erhebt; daher kann man die halbe Differenz dieſer Factoren als die erſte Zahl anſehen. Wenn $a = bc$, ſo läßt ſich ax in die Factoren bx und c zerfällen, und die erſte Zahl iſt $= \frac{bx - c}{2}$, und nun iſt die erſte Bedingung bereits erfüllt. Denn das Quadrat der erſten Zahl oder

$$\left(\frac{bx - c}{2}\right)^2 \text{ iſt } = \tfrac{1}{4}b^2x^2 - \tfrac{1}{2}bcx + \tfrac{1}{4}b^2,$$

addirt man dazu die zweite Zahl $ax = bcx$, ſo erhält man $\frac{1}{4}b^2x^2 + \frac{1}{2}bcx + \frac{1}{4}c^2 = (\frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}c)^2$.

Da das Quadrat der zweiten Zahl auch dann noch ein Quadrat bleiben ſoll, wenn man die dritte Zahl dazu addirt, ſo darf man nur das Quadrat der zweiten Zahl $a^2x^2 = b^2c^2x^2$ von einem beliebigen Quadrat abziehen, und den Reſt als die dritte Zahl anſehen. Um aber für die dritte Zahl einen einfacheren Ausdruck zu erhalten, nimmt man das Quadrat einer zweitheiligen

Größe, deren erſter Theil $ax=bcx$, und deren zweiter $=1$ iſt, ſo erhält man für die dritte Zahl $2bcx+1$.

Nun würde die Summe der drei Zahlen

$$(3bc+\tfrac{1}{2}b)\,x-\tfrac{1}{2}c+1$$

ſein. Damit man dieſen Ausdruck leicht in ein Quadrat verwandeln könne, macht Diophantus den Anſatz ſo, daß $-\frac{1}{2}c$ und $+1$ ſich gegenſeitig heben, und als Summe der drei Zahlen ein Vielfaches von x übrig bleibt. Dies bewirkt er auf folgende Art: er zerfällt ax oder bcx ſo, daß der Factor c das Doppelte eines Quadrats, alſo $\frac{1}{2}c$ ein Quadrat wird, wie das bei der Zerfällung von $4x$ in $2x$ und 2 wirklich der Fall iſt, und auch der Fall ſein würde, wenn er $4x$ in $\frac{1}{2}x$ und 8 zerfällt hätte. Bei der Beſtimmung desjenigen Binomii, durch welches die dritte Zahl beſtimmt wird, in unſerem Falle $4x+1$ oder allgemein $bcx+1$, nimmt man alſo als erſten Theil die zweite Zahl bcx, als zweiten Theil aber $\sqrt{\frac{1}{2}c}$, ſo wird die dritte Zahl nothwendig ein Glied $+\frac{1}{2}c$ enthalten, und die Summe der drei Zahlen wird bloß ein Vielfaches von x ſein.

Die Gleichung $13x=169x^2$ ſoll noch nicht den eigentlichen Werth von x beſtimmen, ſondern ſie ſoll nur dazu dienen, die Ausdrücke für die drei Zahlen ſo zu verwandeln, daß ſie, ohne für x einen beſtimmten Werth feſtzuſetzen, oder ἐν τῷ ἀορίςῳ drei Bedingungen der Aufgabe erfüllen, da ſie bisher deren nur zwei erfüllten. Daher wird aus dieſer Gleichung nicht gefolgert $x=\frac{13}{169}$,

ſondern $x = 13x^2$, oder es wird in die obigen Ausdrücke $13x^2$ ſtatt x geſetzt, denn dadurch werden drei Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Es iſt nämlich

1. $(13x^2-1)^2+54x^2 = 169x^2+26x+1 = (13x^2+1)^2$
2. $(54x^2)^2+104x^2+1 = (54x^2+1)^2$
3. $(13x^2-1)+54x^2+104x^2+1 = 169x^2 = (13x)^2$

Die letzte Bedingung iſt nun, daß auch $(104x^2+1)^2+13x^2-1 = 10816x^4+221x^2$, alſo auch $10816x^2+221$ ein Quadrat ſein ſoll. Man ſetzt daher

$$10816x^2+221 = (104x+1)^2.$$

Eine viel einfachere Auflöſung deutet Fermat an. Man ſetze die erſte Zahl $= x$, die zweite $= 2x+1$, die dritte $= 4x+3$, ſo wird das Quadrat der erſten und zweiten Zahl gewiß wieder ein Quadrat, wenn man die folgende Zahl dazu addirt. Nun ſoll aber auch die Summe der drei Zahlen, und das Quadrat der dritten Zahl, wenn man die erſte Zahl dazu addirt, wieder ein Quadrat werden, d. h. es ſoll ſowohl $7x+4$, als

$$16x^2+25x+9$$

ein Quadrat werden. Beides erreicht man durch das Verfahren der doppelten Gleichung.

XX.

Daß bei der Prüfung, wie die Zahl 13 entſtanden ſei, nur von den Coefficienten von x die Rede ſei, fällt

in die Augen, und der Verf. trug daher kein Bedenken, dies in die Ueberſetzung aufzunehmen.

Der Beweis des Lehnſatzes, auf welchen ſich Diophantus bezieht, ergiebt ſich von ſelbſt, ſobald man den Satz in allgemeinen Zeichen darſtellt. Wenn nämlich a und b zwei beliebige Zahlen ſind, ſo ſoll $4ab+(a-b)^2$ wieder ein Quadrat ſein; vollzieht man aber die Rechnung, ſo erhält man $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. Der darauf gegründete Schluß, daß, wenn man ſtatt 13 oder 12+1 ein Quadrat erhalten will, man die beiden Quadrate nicht willkührlich bilden könne, ſondern daß die Coefficienten von x um 1 verſchieden ſein müſſen, iſt an ſich einleuchtend genug dargeſtellt, daß aber auf dieſe Weiſe das Produkt der erſten und dritten Zahl, wenn man noch 1 dazu addirt, ein Quadrat werden müſſe, läßt ſich aus einer allgemeinen Formel leicht überſehen.

Man nehme das Quadrat von

$$nx+1=n^2x^2+2nx+1,$$

und ſehe n^2x+2n als die erſte, x als die zweite Zahl an, ſo wird die erſte Bedingung der Aufgabe erfüllt. Man mache ferner das Quadrat von

$$(n+1)x+1=(n+1)^2x^2+2(n+1)x+1$$

und ſehe $(n+1)^2x^2+2(n+1)x$ als das Produkt der zweiten und dritten Zahl an. Da nun die zweite Zahl x war, ſo muß die dritte $=(n+1)^2x+2(n+1)$ ſein, und ſo wird auch die zweite Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Nun ſoll aber auch das Produkt der erſten und

dritten Zahl, wenn man noch 1 dazu addirt, ein Quadrat werden, oder folgender Ausdruck

$$(n+1)^2n^2x^2+2(n+1)n^2x+2n(n+1)^2x+4n(n+1)+1$$

ſoll ein Quadrat ſein. Nun überſieht man leicht, daß das erſte Glied ein Quadrat, und $(n+1)nx$ deſſen Wurzel iſt, die beiden letzten Glieder

$$4n(n+1)+1=4n^2+4n+1$$

ſind das Quadrat von $2n+1$, und es kommt jetzt bloß darauf an, ob die beiden mittleren Glieder

$$2(n+1)n^2x+2n(n+1)^2x$$

das doppelte Produkt beider Wurzeln ſind, oder ob mit Weglaſſung der Größe x

$$2(n+1)n^2+2n(n+1)^2=2.(n+1)n\times(2n+1)$$

ſein werde; da aber beide Ausdrücke, wenn man die Rechnung vollzieht, $=4n^3+6n^2+2n$ werden, ſo iſt der obige ganze Ausdruck ein Quadrat, und die hier gewählten Zahlen leiſten was die Aufgabe vorſchreibt.

XXI.

Daß das Produkt der dritten und vierten Zahl, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat wird, iſt nicht Zufall, ſondern da die Coefficienten von x in den Wurzeln $x+1$, $2x+1$, und $3x+1$ immer um 1 wachſen, ſo folgt aus der vorigen Aufgabe, daß das Produkt der zweiten und dritten, ſo wie das Produkt der dritten und vierten, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werden müſſe.

XXIII.

Aus den Betrachtungen, durch welche Diophantus ſeinen urſprünglichen Anſatz berichtigt, ergiebt ſich folgende allgemeine Regel.

1. Man nehme das Quadrat eines beliebigen Binomii von der Form $x+a$, und ſetze x^2+2ax als das Produkt aller drei Zahlen, a^2 als die erſte geſuchte Zahl an.

2. Man mache hierauf das Quadrat von
$$x+2a=x^2+4ax+4a^2,$$
und ziehe davon x^2+2ax ab, und ſetze den Reſt $2ax+4a^2$ als die zweite geſuchte Zahl an, ſo werden durch die Form der Zahlen bereits zwei Bedingungen erfüllt. Man erhält aber auf dieſe Weiſe auch

3. für die dritte Zahl einen einfachen und zweckmäßigen Ausdruck, denn da das Produkt der drei Zahlen $=x^2+2ax$, das Produkt der erſten und zweiten aber $2a^3x+4a^4$ iſt, ſo wird die dritte Zahl
$$=\frac{x^2+2ax}{2a^3x+4a^4}=\frac{x}{2a^3},$$
und es kommt nur darauf an, die Formel
$$x^2+2ax+\frac{x}{2a^3}$$
zu einem Quadrat zu machen, was gar keine Schwierigkeit hat, da das erſte Glied ein vollſtändiges Quadrat iſt. Man ſetze z. B.
$$x^2+2ax+\frac{x}{2a^3}=n^2x^2, \text{ ſo wird } x=\frac{2a+1}{(n^2-1)2a^3}.$$

XXV.

XXV.

Wenn die gegebene Zahl $=a$, ihr erſter Theil $=x$, der zweite Theil alſo $=a-x$ iſt, ſo ſoll das Produkt a^2-ax der Unterſchied eines Cubi und ſeiner Wurzel werden. Die ſinnreiche Betrachtung, welche Diophantus hierüber anſtellt, zeigt deutlich, daß man $\frac{1}{2}ax-1$ als die Wurzel des Cubi anſehen müſſe, um eine einfache Aufloͤſung in rationalen Zahlen zu erhalten.

XXVI.

Zuvoͤrderſt wollen wir hier folgenden Satz beweiſen; wenn drei Zahlen ſo beſchaffen ſind, daß das Produkt von allen dreien eine Kubikzahl iſt, und die Summe der Unterſchiede von je zweien zu ihrer Wurzel hat, ſo hat jedes Vielfache dieſer Zahlen dieſelbe Eigenſchaft. Es moͤgen a, b und c drei ihrer Groͤße nach geordnete Zahlen ſein, welche die vorausgeſetzte Eigenſchaft haben, ſo iſt zu zeigen, daß auch ad, bd und cd dieſelbe Eigenſchaft haben. Da nach dem von Diophantus angefuͤhrten Satze $(a-b)+(a-c)+(b-c)=2a-2c$ iſt, ſo kann man die Vorausſetzung ſo ausdruͤcken: es iſt $abc=(2a-2c)^3$, oder in dem Produkte abc ſoll der Factor $2a-2c$ drei Mal enthalten ſein. Wenn man nun auch ad, bd und cd multiplicirt, ſo erhaͤlt man $abcd^3$, $=abc\times d^3$ In abc iſt nach der Vorausſetzung der Factor $2a-2c$ drei

Mal enthalten, und außerdem kommt darin der Factor d drei Mal vor, wenn aber in einer Zahl jeder Factor drei Mal vorkommt, ſo iſt ſie eine Kubikzahl, und das Produkt der Factoren iſt die Wurzel deſſelben, daher hat $abcd^3$ zu ſeiner Wurzel $(2a-2c)d=$. Eben dieſe Zahl iſt aber auch die Summe der Unterſchiede der Zahlen ad, bd und cd, weil

$$(ad-bd)+(ad-cd)+(bd-cd) = 2ad-2cd = (2a-2c)d.$$

Wenn man alſo drei Brüche von der hier angegebenen Eigenſchaft hat z. B. $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{5}$ und $\frac{5}{3}$, ſo kann man ſtatt derſelben ſogleich drei ganze Zahlen 40, 27 und 25 erhalten, welche dieſelbe Eigenſchaft haben, auch kann man ſtatt dieſer wieder drei Zahlen ſuchen, welche noch immer die nämliche Eigenſchaft behalten, und eine vorgeſchriebene Summe z. B. 4 geben, denn die Frage iſt nur: mit welcher Zahl x muß man die drei Zahlen 40, 27 und 25 multipliciren, damit ihre Summe $=4$ werde?

Hiernach wird der letzte Theil der Auflöſung keine Schwierigkeit mehr haben, auch ſieht man wohl, daß es bei dem Anſatz lediglich auf die Coefficienten ankommt. Diophantus ſetzt nun zuerſt das Produkt der drei Zahlen $=8x^3$, alſo die Summe der drei Unterſchiede $=2x$; daraus folgt, daß der Unterſchied der erſten und dritten Zahl $=x$ ſein müſſe. Die erſte und dritte Zahl müſſen alſo einen um 1 verſchiedenen Coefficienten haben, und

man kann die erſte $=2x$, die dritte $=3x$ ſetzen, und hieraus folgt, daß die zweite $\frac{8x^3}{6x^2}=\frac{8}{6}x$ ſein müſſe. Dieſe drei Zahlen haben wirklich die verlangte Eigenſchaft, daß ihr Produkt $=8x^3=(2x)^3$ iſt, und es kommt nur darauf an, ob auch $2x$ wirklich die Summe der Unterſchiede zwiſchen je zweien der gefundenen Zahlen ſein wird. Dies iſt zwar der Fall, aber der Unterſchied zwiſchen der zweiten und dritten Zahl, $1\frac{1}{3}x-2x$, iſt negativ, da er nach der Vorausſetzung poſitiv ſein ſoll, indem man annimmt, daß die drei Zahlen ihrer Größe nach geordnet ſind, die zweite alſo zwiſchen der erſten und dritten in der Mitte liegt.

In dem Anſatz müſſen daher die Coefficienten, welche vorher 2 und 3 waren, geändert, und durch den veränderten Anſatz bewirkt werden, daß der Coefficient der zweiten Zahl, welcher vorhin $\frac{8}{6}$ war, kleiner als der Coefficient der dritten und größer als der Coefficient der erſten wird. Da die Coefficienten der erſten und dritten Zahl um 1 verſchieden ſein ſollen, ſo ſetzt Diophantus den kleineren $=x$, den größeren $=x+1$, und aus der Betrachtung, daß der vorige Coefficient $\frac{8}{6}=\frac{8}{2.3}$ war, folgt nun, daß man x ſo beſtimmen müſſe, daß

$$\frac{8}{(x+1)x}=\frac{8}{x^2+x}$$

größer wird als x und kleiner als $x+1$.

Diophantus macht nun folgenden Schluß. Der Unterſchied des größten und kleinſten Coefficienten iſt 1, und dies iſt die halbe Summe ſämmtlicher Unterſchiede. Daher muß der Unterſchied der dritten und zweiten, mit dem Unterſchied der erſten und zweiten Zahl zuſammengenommen, ebenfalls $=1$, ein jeder dieſer Unterſchiede aber für ſich genommen kleiner als 1 ſein. Legt man alſo zu der zweiten Zahl noch 1 hinzu, ſo muß dieſe größer werden als die dritte Zahl, oder

$$\frac{8}{x^2+x}+1=\frac{x^2+x+8}{x^2+x}$$

muß größer als $x+1$ ſein.

[Man bemerke hierbei nur, daß Diophantus diejenige Zahl, die er ſonſt die erſte genannt hat, zuweilen die dritte nennt, und überhaupt bei dem Anſatz die Zahlen ſo ordnet, wie ſie zunehmen, nachher aber ſo wie ſie abnehmen. Dies iſt zwar kein weſentlicher Fehler, denn es kommt bloß darauf an, daß die zweite Zahl zwiſchen den beiden übrigen in der Mitte liege, und die erſte und dritte Zahl können ihre Stelle beliebig verwechſeln. Der Verfaſſer glaubte dies aber bemerken zu müſſen, um einem möglichen Mißverſtändniſſe vorzubeugen.]

Wenn nun $\frac{x^2+x+8}{x^2+x}$ größer als $x+1$ ſein ſoll, ſo folgt, daß 8 größer als x^3+x^2 ſein müſſe. Diophantus macht daher einen Cubus, in welchem die Glieder x^3+x^2 vorkommen, und die einfache Betrachtung, aus

welchen Theilen der Cubus einer zweitheiligen Größe $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ alle Mal beſtehen müſſe, ergiebt, daß der Cubus von $x+\frac{1}{3}$ die beiden Glieder x^3+x^2 enthalten werde. Daher ſetzt Diophantus

$$8=\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}.$$

und nun iſt klar, daß 8 größer wird als x^3+x^2. Aus der obigen Gleichung folgt aber auch

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}\right)}$$

oder, wenn man die Rechnung vollzieht

$$2=x+\frac{1}{3}, \text{ folglich } x=\frac{5}{3}.$$

Wenn man alſo in die allgemeinen Ausdrücke für die beiden Coefficienten, (x und $x+1$) ſtatt der Zahl x den Werth $\frac{5}{3}$ ſetzt, ſo erhält man die Zahlen $\frac{5}{3}$ und $\frac{8}{3}$, und nun muß man wieder ſo verfahren, wie im Anfange der Auflöſung geſchehen iſt. Es ſei nämlich das Produkt der Zahlen $=8x^3$, die kleinſte Zahl $=\frac{5}{3}x$, die größte $=\frac{8}{3}x$, ſo iſt das Produkt der größten und kleinſten Zahl $=\frac{40}{9}x^2$, und die zweite Zahl wird gefunden, wenn man das Produkt aller drei Zahlen durch das Produkt der erſten und dritten dividirt, ſie iſt alſo

$$8x^3:\frac{40}{9}x^2=\frac{9}{5}x.$$

Dieſe Rechnung vollzieht Diophantus nicht, ſondern er

ſetzt ſogleich den Werth von $x = \frac{5}{3}$ in die drei allgemeinen Ausdrücke für die gefundenen Coefficienten, und findet alſo $x = \frac{5}{3}$, $\frac{8}{x^2+x} = \frac{9}{5}$ und $x+1 = \frac{8}{3}$.

Daß der Coefficient $\frac{9}{5}$ kleiner wird als $\frac{8}{3}$, iſt eine unmittelbare Folge des ganzen Verfahrens, daß er aber auch größer werden ſolle als $\frac{5}{3}$, darauf ſcheint Diophantus keine Rückſicht genommen zu haben, und Bachet tadelt dies als einen weſentlichen Mangel der Auflöſung. Es iſt dieſem ſtrengen Tadler ſeines Vorgängers Xylander hier aber ein menſchlicher Irrthum begegnet, denn aus dem Verfahren des Diophantus folgt allerdings, daß $\frac{9}{5}$ größer werden müſſe, als $\frac{5}{3}$ oder x, obgleich es nicht ausdrücklich bemerkt wird. Der Coefficient der zweiten Zahl hat nämlich die Form $\frac{8}{x^2+x}$, der Coefficient der erſten Zahl die Form x; nun ſoll $\frac{8}{x^2+x}$ größer als x, oder wenn man alles mit x^2+x multiplicirt, 8 größer als x^3+x^2 ſein. Dies wird aber dadurch erreicht, daß man $8=\left(x+\frac{1}{3}\right)^3$ ſetzt, und der Schluß, durch welchen Bachet zeigen will, $\frac{8}{x^2+x}$ könne kleiner als x ſein, beruht auf einer irrigen Annahme.

XXVII. — XXVIII.

Der Anſatz in XXVII. führt darauf, daß

$$8x^3 + x^2 - 8x - 1$$

ein Cubus ſein ſoll, und dies erreicht man ſehr leicht, wenn man $2x-1$ als die Wurzel der obigen Formel anſieht.

In der folgenden Aufgabe ahmt Diophantus den Anſatz in der vorigen Aufgabe nach, und dies führt darauf, daß $8x^3+8x-x^2-1$ ein Cubus ſein ſolle. Die Wurzel hätte offenbar $2x-1$ ſein müſſen, damit an beiden Seiten $8x^3$ und -1 ſich gegen einander heben. Dies führt aber zuletzt auf den Ausdruck $11x^2+2x=0$, eine Gleichung, welche für x einen negativen Werth geben würde.

Daher wird der urſprüngliche Anſatz als unzweckmäßig verworfen, und dagegen die erſte Zahl $=a^3x+1$, die zweite $=x^2$ geſetzt. Nunmehr iſt

$$(a^3x+1)x^2 - x^2 = a^3x^3,$$

alſo iſt die erſte Bedingung bereits erfüllt, und es kommt bloß darauf an, daß auch

$$(a^3x+1)x^2 - (a^3x+1) = a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1$$

ein Cubus ſei. Man ſetze die Wurzel $=ax-1$, ſo wird

$$a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1 = a^3x^3 - 3a^2x^2 + 3ax - 1$$

folglich $x = \frac{a^3+3a}{3a^2+1}$.

XXIX. — XXX.

Wenn man die geſuchten Zahlen allgemein durch x und z bezeichnet, ſo ſoll ſowohl $zx+x+z$, als $zx-(x+z)$ ein Cubus ſein. Man ſetze daher

$$1.\ zx+x+z=a^3.$$

$$2.\ zx-x-z=b^3.$$

Zieht man nun die zweite Gleichung von der erſten ab, ſo erhält man

$$2x+2z=2(x+z)=a^3-b^3,$$

d. h. der Unterſchied der beiden Cubi, für welche Diophantus zuerſt ganz willkührlich 64 und 8 ſetzt, iſt der doppelten Summe der geſuchten Zahlen gleich, und die Summe der Zahlen ſelbſt iſt $\frac{a^3-b^3}{2}$; man kann daher, wenn a und b gegeben ſind, nicht nur die Summe der Zahlen, ſondern auch das Produkt derſelben leicht berechnen.

Nunmehr kommt es darauf an, aus der gegebenen Summe und dem gegebenen Produkt der Zahlen dieſe Zahlen ſelbſt zu beſtimmen. Dieſe Aufgabe iſt aber in XXX. des erſten Buches bereits gelöſ't, und dabei gezeigt worden, daß eine Auflöſung in rationalen Zahlen nur dann möglich iſt, wenn der Unterſchied zwiſchen dem Produkt der geſuchten Zahlen und dem Quadrate ihrer halben Summe wieder ein Quadrat iſt. Dieſe Einſchränkung wird hier auf die Aufgabe angewendet, und der urſprüngliche Anſatz ſo geändert, daß der Be-

dingung Genüge geſchieht. Diophantus drückt dieſe Bedingung etwas anders aus, indem er auf die Entſtehungsart der Summe und des Produkts der geſuchten Zahlen Rückſicht nimmt, und man ſieht hier an einem Beiſpiel, durch was für Betrachtungen über den Gang der Rechnung die Alten den Mangel allgemeiner Größenzeichen ſich zu erſetzen wußten.

Den bei der XXX. Aufgabe angewendeten Lehnſatz kann man leicht durch eine allgemeine Formel beweiſen. Man zerſtückele x^2 in x und x^2-x, ſo iſt das Produkt beider Stücke $=x^3-x^2$, addirt man dazu die Stücke x^2-x und x, ſo erhält man x^3, alſo in jedem Falle eine Kubikzahl.

XXXI.

Der Lehnſatz, aus welchem Diophantus den Anſatz herleitet, iſt an ſich ſelbſt einleuchtend, da $x^2+x+\frac{1}{4}$ das vollſtändige Quadrat von $x+\frac{1}{2}$ iſt. Da aber

$$x^2+ax+\frac{1}{4}a^2$$

das vollſtändige Quadrat von $x+\frac{1}{2}a$ iſt, ſo kann man den Lehnſatz noch allgemeiner ſo ausdrücken: wenn man zu einem Quadrat ein Vielfaches ſeiner Wurzel und den vierten Theil von dem Quadrate der ganzen Zahl addirt, mit welchem man die Wurzel multiplicirt hat, ſo iſt die Summe in jedem Falle wieder ein Quadrat.

Da jede Zahl die Summe von höchſtens vier Quadraten iſt, ſo iſt die Auflöſung allgemein möglich, die gegebene Zahl ſei welche ſie wolle. Man vergleiche übrigens Fermats Anmerkung zu dieſer Aufgabe, und Legendre Théorie des Nombres S. 182. ff.

XXXIII.

Der Anſatz führt auf die vermiſchte quadratiſche Gleichung $5x^2 - 3x = 18$, und aus den Betrachtung über dieſe Gleichung lernen wir die Auflöſung kennen, deren ſich Diophantus bedient, und welche ich in den Anmerkungen zur Einleitung S. 348 ff. näher entwickelt habe. Aus jener Formel geht hervor, daß in dem vorliegenden Falle $5 . 18 + \frac{9}{4}$ ein Quadrat ſein müßte, wenn x einen rationalen Werth erhalten ſoll. Da nun 5 der um 1 vergrößerte Coefficient von $4x^2$ iſt, ſo muß ſtatt 4 eine andere Quadratzahl z^2 von der Beſchaffenheit geſucht werden, daß $(z^2+1)18+\frac{9}{4}$ ein Quadrat wird. Dies führt darauf, daß man vorläufig $72z^2+81$, oder, da Diophantus nur ein Zeichen für die unbekannte Größe hat, $72x^2 + 81$ zu einem Quadrat machen muß.

Bei der Auflöſung dieſer Aufgabe würde eine neue Schwierigkeit entſtehen, wenn nicht 81 ſchon ein Quadrat wäre. Es läßt ſich aber zeigen, daß $18+\frac{9}{4}$, folglig auch 81 nicht zufällig ein Quadrat wird. Die Zahl 18 iſt hier nämlich ein Produkt von 3.6, die Zahl 3

iſt aber dadurch entſtanden, daß wir 3 von 6 abgezogen haben, daher iſt $\frac{9}{4}$ das Quadrat von $\frac{3}{2}$, oder das Quadrat des halben Unterſchiedes der vorhin multiplicirten Zahlen 3 und 6. Diophantus aber zeigt bei einer andern Gelegenheit, daß man immer ein Quadrat erhalte, wenn man zu dem Produkt zweier Zahlen das Quadrat ihres halben Unterſchiedes addirt.

XXXVI.

Wenn man die erſte Zahl $=3x-1$, die zweite $=x+1$ ſetzt, und 1 zugleich für denjenigen aliquoten Theil annimmt, welchen die zweite Zahl an die erſte abgeben ſoll, ſo iſt eine Bedingung bereits erfüllt.

Um den Schluß, durch welchen Diophantus den aliquoten Theil beſtimmt, den die erſte Zahl an die zweite abgiebt, deutlich einzuſehen, bezeichne man den von der erſten Zahl bleibenden Reſt durch R, ſo ſoll die zweite Zahl $=5R$ werden. Die Summe beider Zahlen iſt alſo $6R$, und da eben dieſe Summe auch $4x$ beträgt, ſo iſt $6R=4x$, folglich $R=\frac{2}{3}x$. Da die erſte Zahl anfangs $3x-1$ war, und ſich jetzt in $\frac{2}{3}x$ verwandelt hat, ſo muß ſie $3x-1-\frac{2}{3}x=\frac{7}{3}x-1$ an die zweite abgegeben haben.

Nunmehr kann man beide Bedingungen als erfüllt anſehen, wenn anders $\frac{7}{3}x-1$ derſelbe aliquote Theil

oder derſelbe Bruch von $3x-1$ d. i. von der erſten Zahl iſt, welcher 1 von $x+1$ d. i. von der zweiten Zahl war. Dies kann man aber dadurch bewirken, daß man den Werth von x durch die Gleichung

$$\left(\frac{7}{3}x-1\right)\times(x+1)=(3x-1)\times 1$$

beſtimmt, d. h. wenn man jede der beiden Zahlen durch den aliquoten Theil der andern multiplicirt, und beide Produkte einander gleich ſetzt. Der Satz, welcher hierbei zum Grunde liegt, iſt für ſich klar, ſobald man ihn durch allgemeine Zeichen darſtellt. Man nehme zwei beliebige Zahlen a und b, ſo werden $\frac{n}{m}.a$ und $\frac{n}{m}.b$ gleiche aliquote Theile von a und b vorſtellen können, und es iſt

$$a\times\frac{n}{m}.b=b\times\frac{n}{m}.a=\frac{abn}{m}.$$

Setzt man nun

$$a.x=b.z,$$

ſo wird man auch umgekehrt ſchließen können, daß $x=\frac{n}{m}b$, und $z=\frac{n}{m}a$, d. h. daß x derſelbe Bruch von b ſei, welcher z von a iſt.

Aus der Gleichung findet man, daß die erſte Zahl $=\frac{8}{7}$, die zweite $=\frac{12}{7}$ ſei, und daß jede $\frac{7}{12}$ ihres Werthes an die andere abgeben müſſe, und hiermit konnte die Auflöſung als beendigt angeſehen werden; um aber die Brüche zu vermeiden, multiplicirt Diophantus die gefundenen Zahlen erſt mit 7, und erhält nun die gan-

zen Zahlen 8 und 12. Da ſich aber $\frac{7}{12}$ von 8 nur durch einen Bruch ausdrücken läßt, ſo multiplicirt er beide Zahlen nochmals mit 3, und erhält nun die Zahlen 24 und 36, welche ſich beide durch 12 ohne Reſt dividiren laſſen.

XXXVII.

Man ſetze die gegebene Zahl 8 = s, die erſte Zahl = x, die zweite = a, ſo hat man nach der Aufgabe

$$(a+1)x + a = s, \text{ alſo } x = \frac{s-a}{a+1}.$$

Dieſe Formel ſagt daſſelbe, was Diophantus in Worten ausſpricht; es iſt aber bemerkenswerth, wie die Alten, durch die einfache Betrachtung deſſen, was bei einer Zahlenrechnung weſentlich oder zufällig iſt, ſich den Gebrauch allgemeiner Formeln zu erſetzen wußten.

XXXVIII.

Man ſieht leicht, warum Diophantus die Einſchränkung macht, daß jede der drei vorgeſchriebenen Zahlen 8, 15, 24 ein um 1 vermindertes Quadrat ſein müſſe. Es iſt nämlich aus Betrachtung der Gleichung $144 = 24x^2$ klar, daß die Auflöſung nur dann in rationalen Zahlen möglich iſt, wenn $\frac{144}{25}$ ein Quadrat iſt.

Aus einer allgemeinen Auflöſung der Aufgabe geht aber hervor, daß zwar durch die hier aufgeſtellte

Bedingung $\frac{144}{25}$ nothwendig ein Quadrat werden müſſe, daß man aber, um dieſen Zweck zu erreichen, die Bedingung weiter faſſen könne. Es wird nämlich verlangt, daß das Produkt der erſten und zweiten Zahl nebſt deren Summe die Zahl a, das Produkt der zweiten und dritten Zahl nebſt deren Summe die Zahl b, das Produkt der erſten und dritten Zahl nebſt deren Summe die Zahl c geben ſollen. Man ſetze die zweite Zahl $x-1$, ſo iſt die erſte Zahl, nach der vorigen Aufgabe, $=\frac{a+1}{x}-1$, die dritte Zahl aber $\frac{b+1}{x}-1$, und dadurch werden ſchon zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt, welchen Werth auch x haben mag. Nun ſoll aber auch das Produkt der erſten und dritten Zahl nebſt deren Summe die Zahl c geben, und daraus entſteht zunächſt die Gleichung

$$c=\frac{(a+1)(b+1)}{x^2}-1$$

und hieraus wieder

$$(c+1)x^2=(a+1)(b+1), \text{ alſo } x^2=\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}.$$

Man erhält alſo für x einen rationalen Werth, wenn der Quotient $\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}$ ein Quadrat iſt; dies iſt nun immer der Fall, wenn $a+1$, $b+1$ und $c+1$ für ſich genommen Quadrate ſind, es wird aber auch dann ſchon der Fall ſein, wenn nur $c+1$ und $(a+1)\times(b+1)$ ſich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten, und

die Bedingung konnte daher ſo ausgedrückt werden: die gegebenen Zahlen müſſen ſo beſchaffen ſein, daß wenn man jede um 1 vermehrt, das Produkt aus je zweien ſich zu der dritten wie ein Quadrat zu einem andern verhält.

Bachet erläutert dies noch durch folgendes Beiſpiel. Es ſei $a=11$, $b=19$, $c=14$, ſo iſt nur die hier angegebene, aber nicht die von Diophantus vorgeſchriebene Bedingung erfüllt. Nun iſt

$$(a+1)\times(b+1)=12\times 20=240, \text{ und } c+1=15,$$

folglich $x=\sqrt{\frac{240}{15}}=\sqrt{16}=4$.

XLI.

Aus der Formel erhellet, daß man die zweite Zahl alle Mal größer annehmen muß, als den Exponenten des vorgeſchriebenen Verhältniſſes, wenn man für die erſte Zahl einen poſitiven Werth verlangt.

XLIII.

Der erſte Anſatz führt auf die Gleichung $25x^2=300$, welche für x nur dann einen rationalen Werth geben würde, wenn $\frac{300}{25}$ ein Quadrat wäre. Diophantus überlegt daher, auf welche Art die Zahlen 300 und 25 entſtanden ſind; ſetzt man nämlich ſtatt der willkührlichen Zahl 5 das allgemeine Zeichen z, ſo ergiebt ſich, daß

$300 = 3z.4z = 12z^2$, 25 aber $= 5z$ ſei, und hieraus findet er, daß, wenn man ſtatt 5 die Zahl 15 ſetzt, man für x einen rationalen Werth erhält, und daß 6, $7\frac{1}{2}$ und 10 drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſind, daß das Produkt von je zweien zu der Zahl 15 das vorgeſchriebene Verhältniß hat. Nach der Aufgabe ſoll aber dies Produkte nicht zu der willkührlichen Zahl 15, ſondern zu der Summe der Zahlen das vorgeſchriebene Verhältniß haben, und dies bewirkt Diophantus vermittelſt folgendes Satzes:

Wenn drei Zahlen a, b und c ſo beſchaffen ſind, daß das Produkt von je zweien zu einer dritten Zahl s ein vorgeſchriebenes Verhältniß hat, und man multiplicirt die Zahlen a, b, c mit einer beliebigen Zahl x, die Zahl s aber mit x^2, ſo wird auch jetzt noch das Produkt aus je zweien zu der Zahl sx^2 daſſelbe Verhältniß haben. Iſt nämlich $ab = ns$, ſo iſt offenbar $ax.bx = nsx^2$, und um daher die Hauptbedingung der Aufgabe zu löſen, iſt die Frage bloß dieſe: Mit welcher Zahl x muß man die Zahlen 6, $7\frac{1}{2}$ und 10, oder allgemein a, b, c multipliciren, damit $(a+b+c)x = sx^2$ ſei, woraus ſich $x = \frac{a+b+c}{s}$ ergiebt.

Setzt man die Summe der drei Zahlen $= x^2$, die erſte Zahl $= \frac{6}{x^2}$, die zweite $= \frac{4}{x^2}$, die dritte $= \frac{8}{x^2}$, ſo wer-

werden durch die bloße Form der Zahlen alle Bedingungen der

XLIV. Aufgabe

erfüllt. Um aber den Zahlenwerth von x zu finden, hat man die Gleichung $x^4 = 18$, welche nur dann einen rationalen Werth geben würde, wenn 18 eine Biquadratzahl wäre. Da 18 die Summe der drei Zahlen 6, 4 und 8 iſt, ſo muß man ſtatt dieſer Zahlen drei andere wählen, deren Summe ein Biquadrat iſt, und zwar ſoll die erſte eine dreieckige, die zweite eine Quadratzahl, die dritte eine Kubikzahl ſein.

Setzt man die Summe der drei Zahlen $= x^4$, die Quadratzahl $= x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$, die Kubikzahl aber $= 8$, ſo muß der Reſt $2x^2 - 9$ die geſuchte dreieckige Zahl ſein. Bekanntlich läßt ſich jede dreieckige Zahl durch die Formel $\frac{n(n+1)}{2}$ oder $\frac{n^2+n}{2}$ vorſtellen, wenn n die Seite oder die Wurzel der dreieckigen Zahl bedeutet. Iſt nun a eine gegebene dreieckige Zahl, deren Wurzel geſucht wird, ſo hat man die Gleichung

$$\frac{n^2+n}{2} = a,$$

und man erhält $n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(8a+1)}$. Wenn alſo a wirklich eine dreieckige Zahl iſt, ſo muß $\sqrt{(8a+1)}$ einen rationalen Werth haben, d. h. $8a+1$ muß eine Quadratzahl ſein. In unſerem Falle iſt $a = 2x^2 - 9$,

hieraus folgt alſo, daß $8(2x^2-9)+1 = 16x^4-71$ ein Quadrat ſein müſſe, und daraus ergiebt ſich, daß man ſtatt der Zahlen 6, 4 und 8, die Zahlen 153, 6400 und 8 ſetzen müſſe.

XLV.

Dieſe ſinnreiche Auflöſung wird durch verſchiedene Zwiſchenbetrachtungen, welche ſie herbeiführt, etwas verwickelt, wir wollen daher das ganze Verfahren noch ein Mal kurz darſtellen, und dabei die von Diophantus nur kurz berührten Punkte näher erläutern.

Wenn man die kleinſte Zahl $=2-x$, die mittelſte $=x+2$, die größte $=7x+2$ ſetzt, ſo ſind durch dieſen Anſatz bereits zwei Bedingungen erfüllt; es iſt nämlich

1) der Unterſchied der größten und mittelſten Zahl das Dreifache von dem Unterſchiede der mittelſten und der kleinſten Zahl; auch iſt
2) die Summe der mittelſten und der kleinſten Zahl ein Quadrat, nämlich 4.

Es ſind alſo noch die beiden Bedingungen übrig, daß auch die Summe der größten und mittelſten Zahl, d. i. $8x+4$, und die Summe der größten und der kleinſten Zahl d. i. $6x+4$ ein Quadrat ſei. Da in beiden Formeln die beſtimmten Zahlen ſich gegeneinander heben, und der Unterſchied beider Formeln $=2x$ wird, ſo läßt ſich die doppelte Gleichung hier ſehr bequem anwenden, und man findet $x=112$. Nun würde aber die kleinſte

Zahl 2—x einen negativen Werth erhalten, und man muß alſo die Auflöſung ſo einrichten, daß x kleiner als 2, folglich 6x+4 kleiner als 16 wird.

Zu dieſem Ende verwirft Diophantus den allgemeinen Ausdruck für die drei Quadrate nicht ganz, weil derſelbe bereits einer Hauptbedingung, das Verhältniß der Unterſchiede betreffend, Genüge leiſtet; es iſt nämlich der Unterſchied des größten und mittelſten (2x) ein Drittheil von dem Unterſchiede des mittelſten und des kleinſten (6x), weil die drei Zahlen ſelbſt ſo beſtimmt worden ſind, daß der Unterſchied der größten und der mittelſten das Dreifache war von dem Unterſchiede der mittelſten und der kleinſten.

Um nun der Bedingung, daß x kleiner werden ſoll als 2, ebenfalls zu genügen, will Diophantus den Werth für x durch folgendes Verfahren beſtimmen. Er behält das Quadrat 4, oder das kleinſte der drei Quadrate bei, und will dazu noch zwei andere Quadrate von der Beſchaffenheit ſuchen, daß der Unterſchied des größten und des mittelſten ein Drittheil ſei von dem Unterſchiede des mittelſten und des kleinſten, und hierauf entweder das größere der beiden neuen Quadrate dem Quadrat 8x+4, oder das kleinere der beiden neuen Quadrate dem Quadrat 6x+4 gleich ſetzen; eine Auflöſung der doppelten Gleichung, welche bis dahin noch nicht gebraucht worden iſt.

Um ſich aber zu überzeugen, daß man auf dieſem Wege aus beiden Gleichungen denſelben Werth für x er-

halte, ſetze man der Kürze wegen $8x+4=A$, $6x+4=B$, $4=C$, ſo iſt nach der vorigen Betrachtung

$$A-B=\frac{1}{3}(B-C).$$

Nun ſuche man zu dem Quadrat C noch zwei Quadrate D und E von der Beſchaffenheit, daß

$$D-E=\frac{1}{3}(E-C).$$

Setzt man nun $B=E$, ſo wird offenbar auch $A=D$ ſein. Es iſt nämlich $\frac{1}{3}(B-C)=\frac{1}{3}(E-C)$, folglich $A-B=D-E$, und da hier die Subtrahendi und die Reſte gleich ſind, ſo müſſen auch die Minuendi A und D einander gleich ſein.

Um die Quadrate, welche wir hier durch D und F bezeichnet haben, zu finden, ſetzt Diophantus die Wurzel von $E=x+2$, alſo $E=x^2+4x+4$, und findet, daß $D=\frac{1}{3}x^2+5\frac{1}{3}x+4$ ſein müſſe, und daß man daher $3x^2+12x+9$ zu einem Quadrat machen müſſe. Die Wurzel dieſes Quadrats muß nun die Form $3-nx$ haben, damit ſich 9 gegen 9 hebe; aber n darf nicht willkührlich genommen werden, wenn x nicht die vorgeſchriebene Grenze überſteigen ſoll. Diophantus überlegt daher, durch welche Rechnung x gefunden wird, um darnach den Coefficienten n beſtimmen zu können. Setzt man nämlich

$$3x^2+12x+9=(3-nx)^2=n^2x^2-6nx+9,$$

ſo wird $x=\frac{6n+12}{n^2-3}$.

Man muß daher n ſo wählen, daß $\frac{6n+12}{n^2-3}$ kleiner als 2, folglich 6n+12 kleiner als $2n^2-6$, alſo $2n^2$ größer als 6n+18 wird.

Betrachtet man die Formel $2n^2=6n+18$ als eine vermiſchte quadratiſche Gleichung, und löſ't dieſelbe nach Diophantus Regel für dieſe Gleichungen auf, ſo wird $n=\frac{\sqrt{(9+2.18)}+3}{2}$.

Nun iſt $\sqrt{(9+2.18)}=\sqrt{45}$ offenbar kleiner als 7, folglich $\sqrt{45}+3$ kleiner als 10, und n wird etwas kleiner als 5. Diophantus ſchließt aber, n dürfe nicht kleiner als 5 ſein, und die Richtigkeit dieſes Schluſſes erhellet ſo. Wenn man $2n^2=6n+18$, oder $2n^2-6n=18$ ſetzt, ſo iſt n um ein Weniges kleiner als 5; nun ſoll aber $2n^2-6n$ größer als 18 ſein, daher muß man für n einen etwas größeren Werth nehmen, als die eben geführte Rechnung gab, und dies geſchieht wenn man n=5 ſetzt, oder irgend eine größere Zahl dafür nimmt, ſo daß alſo 5 wirklich die kleinſte ganze Zahl iſt, welche für n geſetzt werden kann.

Setzt man nun

$$3x^2+12x+9=(3-5x)^2=9-30x+25x^2,$$

ſo wird $x=\frac{21}{11}$, und das Quadrat E, welches dem Quadrat 6x+4 gleich geſetzt werden ſollte, wird $=\frac{1849}{121}$, das Quadrat D, welches dem Quadrat 8x+4 gleich geſetzt

werden ſollte, wird $\frac{2304}{121}$. Man hat alſo die beiden Gleichungen

$$1.\ 8x+4=\frac{2304}{121};\quad 2.\ 6x+4=\frac{1849}{121}.$$

Aus der erſten ergiebt ſich $x=\frac{1365}{726}$; aus der zweiten $x=\frac{1820}{968}$; beide Werthe für x ſind aber einander gleich, indem ſie in kleineren Zahlen ausgedrückt $=\frac{455}{242}$ ſind. Setzt man endlich dieſen Werth für x in die drei Formeln $7x+2$, $x+2$, $2-x$, ſo hat man drei Zahlen von der verlangten Beſchaffenheit.

XLVI.

Durch Betrachtungen, welche in dem Texte deutlich entwickelt werden, findet Diophantus, daß man die größte Zahl $=8x^2+2$ ſetzen könne, und daß alsdann die mittelſte Zahl $=8x^2-2$, die dritte oder kleinſte endlich $=x^2-2$ ſein müſſe. Nun iſt das Quadrat der größten Zahl $=64x^4+32x^2+4$, das Quadrat der mittelſten aber $=64x^4-32x^2+4$, alſo der Unterſchied beider $=64x^2$. Dieſer Unterſchied ſoll nun das Dreifache von dem Unterſchiede zwiſchen der mittelſten und der kleinſten Zahl ſein, d. h. $64x^2=3.7x^2$.

Da dieſe Gleichung nicht Statt finden kann, ſo kommt es darauf an zu überlegen, auf welche Weiſe dieſelbe entſtanden iſt, woraus ſich ergiebt, daß ſtatt der willkührlichen Zahl 2 in dem allgemeinen Ausdruck für

die drei geſuchten Zahlen eine andere zu ſetzen ſei. Nennt man dieſe Zahl vorläufig n, d. h. ſetzt man die erſte Zahl $=8x^2+n$, die zweite $=8x^2-n$, die dritte $=x^2-n$, ſo wird der Unterſchied des größten und mittelſten Quadrates $=32.nx^2$, und da der Unterſchied zwiſchen der mittelſten und der kleinſten Zahl $7x^2$ iſt, ſo muß man n ſo wählen, daß $32.nx^2=3.7.x^2$, alſo auch $32n=3.7$ wird, d. h. man muß $n=\frac{21}{32}$ ſetzen.

Anmerkungen zum fünften Buche.

III. — IV.

Es iſt aus dem griechiſchen Texte nicht ganz klar, aber doch ſehr wahrſcheinlich, daß die Porismen eine beſondere Schrift des Diophantus waren, in welchen beſonders die Form der Zahlen und ihre Zuſammenſetzung aus gewiſſen Beſtandtheilen erörtert wurde. Aus eben dieſer Schrift ſind vermuthlich auch diejenigen Sätze entlehnt, welche in den früheren Büchern angeführt wurden, da ſie ihrem Inhalte nach mit dieſem ſehr nahe verwandt ſind. Ueber den eigentlichen Begriff eines Porisma habe ich mich in einer kleinen Abhandlung über die geometriſche Analyſis der Griechen in des Herrn Profeſſors Fiſcher Anmerkungen zu ſeinem Lehrbuche der Geometrie ausführlicher erklärt, und ich finde, daß auch die hier als Porismen aufgeſtellten Sätze ganz dem dort entwickelten Begriff entſprechen. Man kann und muß den Satz nämlich ſo ſtellen: man hat zwei Zahlen von der Beſchaffenheit, daß ſowohl

jede derſelben für ſich, als das Produkt beider ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeſchriebene Zahl dazu addirt, und man ſoll erforſchen, auf welche Art dieſe Zahlen entſtanden ſind, oder aus was für Beſtandtheilen ſie ſich zuſammen ſetzen laſſen. Sehr anziehend müßte es ſein, das in den Porismen gebrauchte Verfahren der Erforſchung, inſofern es arithmetiſche Fragen betraf, näher zu kennen, leider findet ſich bei Diophantus davon keine Spur mehr, unſtreitig aber würden wir von der allgemeinen Arithmetik der Griechen dadurch eine andere Vorſtellung bekommen, als man ſich jetzt davon zu bilden geneigt iſt.

Die Art, wie Diophantus aus zwei auf einander folgenden Quadraten ſeinen Anſatz herleitet, iſt von ihm ſelbſt deutlich beſchrieben worden. Man nehme zwei Quadrate deren Wurzeln um 1 verſchieden ſind, z. B. a^2 und a^2+2a+1, und ziehe von jedem die vorgeſchriebene Zahl b ab, ſo iſt von ſelbſt klar, daß die Reſte a^2-b und $a^2+2a+1-b$ Quadrate werden müſſen, wenn man die Zahl b dazu addirt. Setzt man nun die dritte Zahl der doppelten Summe der erſten und zweiten weniger 1 gleich, oder

$$=2(a^2-b+a^2+2a+1-b)-1=4a^2+4a-4b+1,$$

ſo haben dieſe Zahl die Eigenſchaften, daß die Produkte aus je zweien Quadrate werden, wenn man die Zahl b dazu addirt. Es iſt nämlich das Produkt der erſten und zweiten Zahl, wenn man b dazu addirt,

$$a^4+2a^3+a^2-2a^2b-2ab+b^2=(a^2+a-b)^2.$$

Es iſt ferner das Produkt der erſten und dritten Zahl, wenn man b dazu addirt

$$4a^4+4a^3+a^2-8a^2b-4ab+4b^2=(2a^2+a-2b)^2,$$

und endlich iſt das Produkt der zweiten und dritten Zahl, wenn man b dazu addirt,

$$4a^4+12a^3+13a^2+6a-8a^2b-12ab$$
$$-4b+4b^2+1=(2a^2+3a+1-2b)^2$$

Es bleibt daher nur noch die eine Bedingung übrig, nämlich daß auch die dritte Zahl, wenn man b dazu addirt, ein Quadrat werde, und dieſe Bedingung läßt ſich ſehr leicht erfüllen, wenn man $2x-6$ als die geſuchte Wurzel anſieht.

Auf ähnliche Art kann man ſich auch überzeugen, daß in der vierten Aufgabe die drei Zahlen,

$$x^2+6,\ x^2+2x+7 \text{ und } 4x^2+4x+28$$

durch ihre bloße Form alle Bedingungen der Aufgabe bis auf eine erfüllen, welche wieder auf dem bekannten Wege erreicht wird.

V.

Den Lehnſatz, auf welchen ſich Diophantus bezieht, kann man auf folgende Art leicht beweiſen.

Man nehme zwei auf einander folgende Quadrate, d. h. ſolche, deren Wurzeln um 1 verſchieden ſind, nämlich

$(x+1)^2=x^2+2x+1$, und $(x+2)^2=x^2+4x+4$,

und dazu nehme man als dritte Zahl $4x^2+12x+12$,

d. h. die doppelte Summe beider $+2$, ſo haben dieſe drei Zahlen die behauptete Eigenſchaft.

Das Produkt der beiden erſten Zahlen iſt nämlich

$$x^4+6x^3+13x^2+12x+4.$$

Addirt man dazu die Summe der beiden erſten Zahlen, ſo erhält man

$$x^4+6x^3+15x^2+18x+9=(x^2+3x+3)^2.$$

Addirt man aber die dritte Zahl, ſo erhält man

$$x^4+6x^3+17x^2+24x+16=(x^2+3x+4)^2.$$

Das Produkt der erſten und der dritten Zahl iſt

$$4x^4+20x^3+40x^3+36x+12.$$

Addirt man dazu die Summe der erſten und der dritten Zahl, ſo erhält man

$$4x^4+20x^3+45x^2+50x+25=(2x^2+5x+5)^2.$$

Addirt man aber die zweite Zahl, ſo erhält man

$$4x^4+20x^3+41x^2+40x+16=(2x^2+5x+4)^2.$$

Das Produkt der zweiten und dritten Zahl endlich iſt

$$4x^4+28x^3+76x^2+96x+48.$$

Addirt man dazu die Summe der beiden Zahlen, ſo erhält man

$$4x^4+28x^3+81x^2+112x+64=(2x^2+7x+8)^2.$$

Addirt man aber die erſte Zahl, ſo erhält man

$$4x^4+28x^3+77x^2+98x+49=(2x^2+7x+7)^2.$$

Durch den gewählten Anſatz ſind alſo alle Bedingungen der Aufgabe wirklich erfüllt, bis auf die eine, daß auch $4x^2+12x+12$ ein Quadrat ſein ſoll.

VI.

Diophantus bemerkt zuerſt, daß, wenn man zu den in der vorigen Aufgabe gefundenen Zahlen noch 2 addirt, dieſe Zahlen der Aufgabe genügen, eine Behauptung die ſich ſogleich als richtig beweiſ't, wenn man mit drei Zahlen von der vorgeſchriebenen Form die angegebene Rechnung vornimmt.

Um jedoch nicht die Zahlen aus der vorigen Aufgabe beizubehalten, ändert Diophantus den Anſatz inſofern, als er für die beiden auf einander folgenden Quadrate, welche in der vorigen Aufgabe x^2+2x+1 und x^2+4x+4 waren, jetzt zwei andere Quadrate von der nämlichen Beſchaffenheit, nämlich x^2 und x^2+2x+1 annimmt, woraus er für den gegenwärtigen Zweck die Zahlen x^2+2, x^2+2x+3 und $4x^2+4x+6$ herleitet. Da die Zahl $4x^2+4x+4$ noch nicht durch ihre bloße Form ein Quadrat iſt, ſo muß ſie auf dem gewöhnlichen Wege zu einem Quadrat gemacht werden.

VII.

Wenn zwei Zahlen a und b die Eigenſchaft haben, daß ihr Produkt und die Summe ihrer Quadrate zuſammengenommen wieder ein Quadrat geben, ſo hat auch jedes Vielfache dieſer Zahlen z. B. an und bn dieſelbe Eigenſchaft, d. h. wenn $ab+a^2+b^2$ ein Quadrat iſt, ſo wird $abn^2+a^2n^2+b^2n^2$ ebenfalls ein Quadrat

ſein. Der Ausdruck läßt ſich nämlich in die Factoren a^2 und $ab+a^2+b^2$ zerfällen, und da der erſte nach der Conſtruction, der zweite nach der Annahme ein Quadrat iſt, ſo iſt auch die ganze Formel ein Quadrat. Daher war Diophantus berechtigt, die Zahlen $\frac{3}{5}$ und 1 mit einer beliebigen Zahl zu multipliciren, und es werden daher nicht bloß die Zahlen 3 und 5, ſondern jedes Vielfache dieſer Zahlen der Aufgabe Genüge leiſten.

VIII.

Was es heiße, ein rechtwinkliges Dreieck werde von zwei Zahlen gebildet, iſt ſchon in der Anmerkung zu der XXII. Aufgabe des dritten Buches bemerkt worden. Wenn man nämlich ein Dreieck aus den Zahlen a und b bildet, ſo ſieht man die Zahl a^2+b^2 als die Hypotenuſe, a^2-b^2 als die eine, und die Zahl $2ab$ als die andere Kathete an, wobei es gewöhnlich iſt, diejenige Kathete, welche durch die Zahl a^2-b^2 vorgeſtellt wird, die **Grundlinie**, diejenige Kathete, welche durch $2ab$ vorgeſtellt wird, das **Loth** zu nennen.

Daß ein Dreieck, deſſen Seiten durch die Zahlen a^2+b^2, a^2-b^2 und $2ab$ vorgeſtellt werden können, nothwendig rechtwinklig ſein müſſe, iſt leicht zu überſehen, denn das Quadrat der Grundlinie wird $a^4-2a^2b^2+b^4$, das Quadrat des Loths wird $4a^2b^2$, alſo iſt das Quadrat beider Katheten $=a^4+2a^2b^2+b^4$, und eben ſo groß iſt auch das Quadrat der dritten Seite, weil

$(a^2+b^2)^2 = a^4+2a^2b^2+b^4$. Es folgt alſo (aus Eukl. I. 48), daß ein ſo gebildetes Dreieck rechtwinklig ſein müſſe.

Stellt man das Verfahren, wodurch Diophantus drei rechtwinklige Dreiecke von gleichem Flächeninhalt ſucht, allgemein vor, ſo iſt

das erſte von den Zahlen $\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$ und a,
das zweite von den Zahlen $\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$ und b,
das dritte von den Zahlen $\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$ und $(a+b)$

gebildet, und nun läßt ſich leicht zeigen, daß alle dieſe Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben müſſen.

In dem erſten Dreieck iſt nämlich die Hypotenuſe $=2a^2+b^2+ab$, die Grundlinie $=b^2+ab$, das Loth $=2a\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$, folglich wird der Flächeninhalt $=(b^2+ab)a\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$, oder wenn man $\sqrt{(a^2+b^2+ab)}=r$ ſetzt, $=(a^2b+ab^2)r$.

In dem zweiten Dreieck ferner iſt die Hypotenuſe $=a^2+2b^2+ab$, die Grundlinie $=a^2+ab$, das Loth endlich $=2b\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$, folglich wird der Flächeninhalt $=(a^2+ab)b\sqrt{(a^2+b^2+ab)}=(a^2b+ab^2)r$.

In dem dritten Dreieck endlich iſt die Hypotenuſe $=2a^2+2b^2+3ab$, die Grundlinie $=ab$, und das Loth $=2(a+b)\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$, folglich wird der Flächeninhalt $=ab(a+b)\times\sqrt{(a^2+b^2+ab)}=(a^2b+ab^2)r$.

IX.

Wenn a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ſind, ſo iſt das Quadrat der Hypotenuſe

$= a^2 + b^2$, der vierfache Flächeninhalt $= 2ab$, folglich erhält man alle Mal ein Quadrat, man mag die vierfache Fläche zu dem Quadrat der Hypotenuſe addiren, oder dieſelbe davon abziehen.

Die Zahlen 58, 74, 113 ſind nun Hypotenuſen von drei verſchiedenen Dreiecken, deren Fläche $= 3360$ iſt, folglich werden die Quadrate der genannten Zahlen auch dann noch Quadrate bleiben, wenn man 3360 dazu addirt, oder davon abzieht. Wäre nun 3360 auch die Summe der drei Zahlen 58, 74, 113, ſo wäre die Aufgabe bereits gelöſ't. Um auch dieſe Bedingung zu erfüllen, multiplicire man die Seiten der drei geſuchten Dreiecke mit einer unbekannten Zahl x, ſo werden die dadurch entſtehenden Dreiecke noch immer die vorige Eigenſchaft behalten, die Hypotenuſen aber werden $58x$, $74x$, $113x$, und der Flächeninhalt $= 3360x^2$ ſein. Die Frage iſt alſo nur: wie groß muß x ſein, damit $58x + 74x + 113x = 3360x^2$ werde?

X.

Der erſte Theil des Satzes hat bloß die Abſicht, die Möglichkeit der Auflöſung im Allgemeinen zu zeigen, und ſie für einen beſtimmten Fall wirklich auszuführen, der zweite Theil ſoll zeigen, wie man aus dieſem Verfahren eine allgemeine Regel der Auflöſung entwickeln könne, ἵνα καὶ ἐν μεθόδῳ κείμενον ᾖ. Zu dieſem Ende überlegt Diophantus, durch welche Rech-

nung die einzelnen Zahlen entſtanden ſind, und was in dieſer Rechnung bloß zufällig oder weſentlich ſei, und erhält auf dieſe Weiſe daſſelbe Ergebniß, welches man durch Rechnung in allgemeinen Zeichen findet.

Man nenne die drei gegebenen Quadrate a^2, b^2, c^2; ſetzt man nun die erſte der geſuchten Zahlen $= x$, die zweite $= \frac{a^2}{x}$, die dritte $= \frac{b^2}{x}$, ſo ſind bereits zwei Bedingungen erfüllt, denn das Produkt der erſten und zweiten iſt a^2, das Produkt der erſten und dritten iſt b^2; es iſt alſo nur noch zu bewirken, daß das Produkt der zweiten und dritten oder $\frac{a^2 b^2}{x^2} = c^2$ ſei. Man nehme beide Ausdrücke als gleich an, ſo iſt

$$c^2 x^2 = a^2 b^2; \; x^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}, \; x = \frac{ab}{c},$$

eine Formel, welche die von Diophantus ausgeſprochene Regel in allgemeinen Zeichen ausdrückt. Entwickelt man den Werth der beiden übrigen Zahlen, ſo wird die erſte $= a^2 : \frac{ab}{c} = \frac{ac}{b}$, und die zweite $= b^2 : \frac{ab}{c} = \frac{bc}{b}$, ſo daß alſo die Allgemeinheit der Regel einleuchtet.

XI.

Die Anwendung des für x gefundenen Werthes fehlt bei Diophantus ganz, auch ſind die angegebenen Zahlen in dem griechiſchen Texte durch unregelmäßige Brüche ausgedrückt, in welche ſich augenſcheinlich manche Fehler eingeſchlichen haben. Bachet giebt für x den

durch

durch kleinere Zahlen ausgedrückten Werth $\frac{781543}{9699920}$, und berechnet hieraus die erſte Zahl $= \frac{838595639}{27402274}$, die zweite $\frac{3267631283}{281297680}$, die dritte $= \frac{2561116411}{358897040}$, überläßt aber die Prüfung der Zahlen demjenigen, der mehr Luſt und Muße als er dazu habe. Da dies bei dem Verfaſſer dieſer Ueberſetzung nicht der Fall iſt, ſo beſchränkt er ſich bloß auf folgende Bemerkungen, welche die Richtigkeit des Verfahrens zeigen werden.

Diophantus hat in der VIII. Aufgabe gezeigt, wie man drei rechtwinklige Dreiecke von gleichem Flächeninhalt finden könne, und wir wiſſen, daß folgende Dreiecke dieſer Forderung genügen:

I. 40, 42, 58.
II. 24, 70, 74.
III. 15, 112, 113.

Nennen wir nun die gemeinſchaftliche Fläche dieſer Dreiecke f, die Hypotenuſen aber der Reihe nach a, b, c, ſo wiſſen wir aus IX. daß $a^2 \pm 4f$, $b^2 + 4f$ und $c^2 \pm 4f$ alle Mal ein Quadrat ſei, und wenn wir alſo drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Produkte von je zweien a^2, b^2 und c^2 geben, ihre Summe aber $= 4f$ wird, ſo iſt die gegenwärtige Aufgabe gelöſ't. Das erſte hat gar keine Schwierigkeit, denn wir wiſſen aus der Anmerkung zur X. Aufgabe, daß die Zahlen $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{bc}{a}$ die verlangte Eigenſchaft haben. Damit nun

4f aber auch der Summe der drei Zahlen gleich werde, ſo multiplicirt Diophantus dieſe Zahlen mit x, und dies iſt eben ſo viel, als hätte er die Hypotenuſen ſelbſt, und überhaupt alle Seiten der obigen Dreiecke mit x multiplicirt, wodurch bloß ihre Größe, aber keinesweges ihre übrigen Eigenſchaften geändert werden. Daher verwandelt ſich die gemeinſchaftliche Fläche dieſer Dreiecke in fx^2; es iſt alſo nur noch die Frage, wie groß muß x ſein, damit

$$\frac{ab}{c}x + \frac{ac}{b}x + \frac{bc}{a}x = 4fx^2$$

werde, und man findet

$$x = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4abcf}.$$

XII.

Wenn man die beiden Stücke, in welche die Zahl 1 getheilt werden ſoll, allgemein durch y und z bezeichnet, ſo verlangt die Aufgabe, daß ſowohl $y+6$ als $z+6$ ein Quadrat, alſo $12+y+z=13$ die Summe zweier Quadrate ſein ſoll, deren jedes größer als 6 und kleiner als 7, oder, wie Diophantus nachher dieſelbe Bedingung ausdrückt, deren Differenz kleiner als 1 iſt. Denn wenn dieſe Quadrate gefunden ſind, ſo iſt nur noch erforderlich, von jedem Quadrat die Zahl 6 abzuziehen, um ſogleich die Werthe von y und z zu haben.

Um nun 13 in zwei Quadrate von der verlangten Eigenſchaft zu theilen, wählt Diophantus folgenden Weg. Er nimmt die Hälfte der Zahl $13 = 6\frac{1}{2}$, und

ſucht zuerſt ein Quadrat, welches dieſer Zahl möglichſt nahe kommt, d. h. er ſucht einen möglichſt kleinen Bruch, der zu der Zahl $6\frac{1}{2}$ addirt, dieſe Zahl zu einem Quadrate macht. Um den Bruch wegzuſchaffen, multiplicirt er $6\frac{1}{2}$ mit der Quadratzahl 4, und ſucht einen quadratiſchen Bruch d. i. ein Bruch von der Form $\frac{1}{x^2}$, der ſo beſchaffen iſt, daß $26+\frac{1}{x^2}$, folglich auch der vierte Theil dieſer Zahl, d. i. $6\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}$ ein Quadrat wird. Um $26+\frac{1}{x^2}$ deſto leichter zu einem Quadrat zu machen, multiplicire man dieſen Ausdruck mit x^2, und mache $26x^2+1$ zu einem Quadrat, was gar keine Schwierigkeit hat, da das letzte Glied 1 ein Quadrat iſt. Die Wurzel wird nun die Form $nx\pm1$ haben müſſen, und n könnte ganz beliebig gewählt werden, wenn nicht gefordert werden müßte, daß $\frac{1}{x^2}$ ein eigentlicher Bruch, alſo x größer als 1 ſei. Wir wollen indeß die Betrachtung, wie n zu wählen ſei, für jetzt noch übergehen, um darüber am Ende dieſer Anmerkung ausführlicher zu reden.

Diophantus ſetzt $n=5$, d. h. er ſetzt $26x^2+1=(5x+1)^2=25x^2+10x+1$, und findet aus dieſem Anſatz $x=10$, alſo $\frac{1}{x}=\frac{1}{10}$, und $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{100}$, folglich wird $26+\frac{1}{x^2}=\frac{2601}{100}$. Dieſe Zahl iſt nun das Quadrat von $\frac{51}{10}$, und es iſt klar, daß auch der vierte Theil dieſer Zahl

d. i. $6\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}=\frac{2601}{400}$ ein Quadrat, und nur um $\frac{1}{400}$ grö-
ßer als $6\frac{1}{2}$ ſein werde.

Nunmehr kommt es darauf an, die Zahl 13 in zwei Quadrate zu theilen, deren jedes ſich der Zahl $\frac{2601}{400}$ mög- lichſt nähert, oder auch, deren Wurzeln der Zahl $\frac{51}{20}$ mög- lichſt nahe kommen. Da 13 die Summe zweier Quadrate, 4 und 9 iſt, ſo werden die Wurzeln der geſuchten Quadrate die Form $2+nx$ und $3-mx$ haben müſſen. Wollte man nun, daß beide Wurzeln genau den Werth $\frac{51}{20}$ erhalten, ſo müßte man $nx=\frac{11}{20}$, und $mx=\frac{9}{20}$ ſetzen, wie man leicht findet, wenn man 2 von $\frac{51}{20}$, und $\frac{51}{20}$ von 3 abzieht.

Man ſetze jetzt die eine Wurzel $2+nx$, die andere $3-9x$, ſo haben beide Wurzeln noch den gleichen Werth $\frac{51}{20}$, ſo lange $x=\frac{1}{20}$ iſt. Unter dieſer Vorausſetzung werden aber die Quadrate dieſer Wurzeln gleich, nämlich beide $=\frac{2601}{400}$, alſo die Summe von beiden $=\frac{2601}{200}=13\frac{1}{200}$ ſein. Man ſetze aber die Summe beider Quadrate, d. h. $202x^2-10x+13=13$, ſo iſt klar, daß man für x einen etwas kleineren Werth als $\frac{1}{20}$ erhalten müſſe, und nun wird die Wurzel $2+nx$ etwas kleiner, die Wurzel $3-mx$ etwas größer als $\frac{51}{20}$ ſein, und die Zahl 13 iſt alſo in

zwei Quadrate getheilt, deren jedes dem Quadrat $\frac{2601}{400}$ nahe kommt, alſo wenig gröſſer oder kleiner als $6\frac{1}{2}$ iſt.

Dieſe ſinnreiche Methode, zwei Quadrate der halben Summe beider, alſo auch eines dem andern möglichſt nahe zu bringen, nennt Diophantus im Folgenden τὴν τῆς παρισότητος ἀγώγην, das Verfahren der Beinahegleichheit oder der Annäherung an einen vorgeſchriebenen Werth, und wir werden in der Folge ſehen, daß es ſich auf drei und überhaupt ſo viele Quadrate, als man immer will, anwenden läßt.

Wir ſahen vorher, daß, wenn man $26x^2+1$ zu einem Quadrat macht, die Wurzel $nx+1$ ſo zu beſtimmen ſei, daß x gröſſer als 1 wird, und es entſteht daher die Frage, wie die Zahl n zu wählen ſei. Man überlege zuerſt, wie man Werth von x findet; ſetzt man aber

$$26x^2+1=(nx+1)^2$$

ſo wird $x=\frac{2n}{26-n^2}$, und wir ſehen alſo ſchon, daß n^2 nicht gröſſer als 26, alſo n in ganzen Zahlen höchſtens $=5$ ſein kann. Nun ſoll aber auch

$$\frac{2n}{26-n^2}>1, \text{ folglich } n^2+2n>26$$

ſein, und wenn man dieſen Ausdruck als eine vermiſchte quadratiſche Gleichung behandelt, ſo findet man $n=\sqrt{27}-1=4,19$. Dieſer Werth iſt aber noch zu klein, da man, um den obigen Ausdruck in eine

wirkliche Gleichung zu verwandeln für 26 eine etwas größere Zahl ſetzen müßte. Um daher ſicher zu gehen, muß man n in ganzen Zahlen mindeſtens $=5$ ſetzen, ſo daß alſo die Wurzel weder größer noch kleiner werden konnte, als $5x+1$, inſofern man für n eine ganze Zahl ſetzen will.

Bezeichnet man die in der Aufgabe vorgeſchriebene Zahl 6 durch a, ſo kommt alles darauf an, die Zahl $2a+1$ in zwei Quadrate zu theilen, und die Aufgabe iſt daher nur zu löſen, wenn $2a+1$ entweder ſelbſt ein Quadrat, oder die Summe zweier Quadrate iſt. Diophantus fügt daher dieſer Aufgabe eine Bedingung bei, welche im griechiſchen Texte wörtlich lautet:

δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδα ᾱ μείζονα [ἔχῃ μέρος τέταρτον], ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Es iſt kaum möglich, in die zweite Hälfte des Satzes, ſo wie ſie im Texte ſteht, einen Sinn zu bringen. Man werfe aber die Worte *μέρος τέταρτον*, als ein Gloſſem eines Abſchreibers, aus dem Texte, und leſe *ἔχειν* ſtatt *ἔχῃ*, *ὅς* ſtatt *ἢ* und *τινός* ſtatt des abgekürzten *τοῦ*, ſo iſt die Ueberſetzung wörtlich: die gegebene Zahl muß weder eine ungerade ſein, noch das Doppelte derſelben eine um 1 größere Zahl haben, welche von einer Primzahl gemeſſen wird, d. h. a muß eine Zahl von der Form 2n, alſo $2a+1$ von der Form $4n+1$, und zugleich eine **Primzahl** ſein. Die letztere Bedingung hätte allerdings viel kürzer

ausgedrückt werden können, aber der Verfaſſer hatte ein Mal die erſte Bedingung durch eine Verneinung ausgedrückt, und wurde dadurch veranlaßt, auch die zweite auf dieſelbe Weiſe auszudrücken. Wie das μέρος τέταρτον in dem Text gekommen ſei, iſt leicht zu erklären, denn da die gegebene Zahl eine gerade ſein ſoll, ſo muß das Doppelte derſelben durch 4 theilbar ſein, oder μέρος τέταρτον ἔχειν; dies bemerkte ein Leſer bei den Worten ὁ διπλασίων αὐτοῦ, und ein Abſchreiber, der das Ganze nicht faßte, nahm es in den Text auf.

Daß die Bedingung, ſo wie ſie hier entwickelt iſt, vortrefflich zu der Aufgabe paßt, iſt leicht zu überſehen. Denn geſetzt die gegebene Zahl a wäre ungerade oder von der Form $2n+1$, ſo wäre $2a+1$ von der Form $4n+3$, oder $4n-1$. Es läßt ſich aber beweiſen, daß eine Zahl von dieſer Form nie die Summe zweier Quadrate ſein kann.

Denn in Rückſicht auf den Diviſor 4 können alle Zahlen unter einer von folgenden 4 Formen vorgeſtellt werden: $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, die Quadrate davon ſind $16n^2$, $16n^2+8n+1$, $16n^2+16n+4$, $16n^2+24n+9$. Vergleicht man dieſe Quadrate in Rückſicht auf den Diviſor 4, ſo ſind die geraden Quadrate alle von der Form $4n$, die ungeraden von der Form $4n+1$, und es kann kein Quadrat von der Form $4n+2$ und $4n+3$ geben. Sollte nun die ungerade Zahl $2a+1$ die Summe zweier Quadrate ſein, ſo müßte das eine derſelben gerade, alſo von der Form $4n$, das zweite ungerade, alſo

von der Form 4n+1 ſein, alſo wird auch die Summe derſelben alle Mal die Form 4n+1 haben, und eine Zahl von der Form 4n+3 kann nie die Summe zweier Quadrate ſein. Allein hiedurch hätte Diophantus bloß gewiſſe für ſeinen Zweck unbrauchbare Zahlen ausgeſchloſſen, aber die Bedingung iſt auch ſo gefaßt, daß alle unbrauchbaren Zahlen dadurch ausgeſchloſſen ſind. Euler beweiſt nämlich in den Denkſchriften der Petersburger Academie den von Fermat bereits behaupteten Satz, daß jede Primzahl von der Form 4n+1 die Summe zweier Quadrate ſei. Man vergleiche Wallisii Opp. Tom. II. p. 858. und die Comment. Nov. Acad. Petrop. Tom. IV. Tom. VI. p. 221., vorzüglich aber Tom. VIII. p. 125.

XIII.

Bei der Auflöſung der Aufgabe kommt es bloß darauf an, die Zahl 9 in zwei Quadrate zu theilen, und zwar ſo, daß das eine, welches hier allgemein durch x^2 bezeichnet wird, zwiſchen 2 und 3 fällt, was geſchehen wird, wenn x^2 größer als $\frac{289}{144}$ und kleiner als $\frac{361}{144}$, folglich x größer als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{19}{12}$ wird. Den Werth von x erhält man aber auf folgende Weiſe. Man betrachtet eine Zahl von der Form $3-nx$ als die Wurzel des zweiten Quadrates $9-x^2$, und erhält

$$9-x^2 = 9-6nx+n^2x^2,\ \text{folglich}\ x = \frac{6n}{n^2+1}$$

daher muß

$$\frac{6n}{n^2+1} > \frac{17}{12}\ \text{oder}\ 17n^2-72n < -17$$

ſein. Man betrachte den letzteren Ausdruck als eine vermiſchte quadratiſche Gleichung, und löſe dieſelbe nach der in der Einleitung gegebenen Regel auf, ſo muß man zuerſt den halben Coefficienten von n d. i. 36 zum Quadrat erheben, giebt 1296; dazu muß man das Produkt der beſtimmten Zahl —17 und des Coefficienten von x^2, welcher ebenfalls 17 iſt, addiren, oder, da das Produkt in dieſem Falle negativ iſt, ſubtrahiren. Aus dem Reſte 1007 muß man nun die Quadratwurzel ziehen, und dieſe iſt 31, 7.... Aber dieſe Wurzel iſt offenbar zu groß, denn um die obige Formel in eine wirkliche Gleichung zu verwandeln, müßte man ſtatt —17 eine noch kleinere Zahl ſetzen, wodurch alſo die Wurzel kleiner wird; daher ſagt Diophantus, die Wurzel von 1007 ſei nicht größer, oder vielmehr ſie dürfe in ganzen Zahlen nicht größer als 31 werden, wenn man der Bedingung genügen will. Um endlich n zu finden, muß man zu $\sqrt{1007}$ noch den halben Coefficienten von x, d. i. 36 addiren, und die Summe mit dem Coefficienten von x^2, d. i. durch 17 dividiren, ſo daß man aus dieſer Betrachtung $\frac{67}{17}$ als die eine Grenze der Zahl n findet.

Eine zweite Bedingung war aber, daß

$$\frac{6n}{n^2+1} < \frac{19}{12} \text{ oder } 19n^2 - 72n > -19$$

ſein müſſe. Betrachtet man dieſen Ausdruck wieder als eine vermiſchte quadratiſche Gleichung, ſo wird

$$n = \frac{\sqrt{(1296-19.19)}+36}{19} = \frac{30,5+36}{19} = \frac{66,5}{19}.$$

Nun iſt aber $\sqrt{(1296-19.19)}$ offenbar zu klein, denn um den obigen Ausdruck in eine Gleichung zu verwandeln, müßte man ſtatt —19 eine etwas größere Zahl ſetzen, wodurch die Wurzel etwas größer würde. Man findet alſo, wenn man von der Wurzel 0,5 wegläßt, die Zahl $\frac{66}{19}$ als die zweite Grenze für n. Nun liegt die Zahl $\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$ zwiſchen beiden Grenzen, und wenn man daher $n=\frac{7}{2}$ ſetzt, ſo wird die vorgeſchriebene Bedingung erfüllt.

Man bemerke hierbei, daß Diophantus, bei Ausmittelung der Grenzen für eine Zahl, die Quadratwurzeln immer nur in ganzen Zahlen berechnet, und die Brüche wegläßt, alle Mal aber, wie auch hier, unter ſolchen Umſtänden, daß dadurch die Grenzen noch enger zuſammengezogen werden, alſo um ſo weniger ein Fehler entſtehen kann. Denn man überſieht leicht, daß in dem gegenwärtigen Falle n noch um eine Kleinigkeit größer als $\frac{67}{17}$, und auch noch um einen kleinen Bruch kleiner als $\frac{66}{19}$ ſein darf.

XIV.

In dieſer Auflöſung bedarf nur das Verfahren einer nähern Erläuterung, wodurch Diophantus ſtatt der drei Quadrate 9, $\frac{16}{25}$ und $\frac{9}{25}$, aus welchen die Zahl 10 beſteht, drei andere Quadrate findet, welche ſich dem

Werth $\frac{121}{36}$, deren Wurzeln ſich alſo dem Werth $\frac{11}{6}$ nä-hern. Um die Brüche auf gleiche Nenner zu bringen, multiplicirt und dividirt Diophantus die drei Wurzeln und die Zahl, der ſich alle drei möglichſt nähern ſollen, durch 30, und es entſteht alſo die Frage, wie iſt es anzuſtellen, damit man ſtatt der Wurzeln $\frac{90}{30}$, $\frac{24}{30}$ und $\frac{18}{30}$ drei andere finde, die ſich dem Werthe $\frac{55}{30}$ möglichſt nähern. (In dem griechiſchen Texte iſt der gemeinſchaftliche Nenner, wie öfters, weggelaſſen.) Die drei geſuchten Wurzeln müſſen die Form $\frac{90}{30} - mx$, $\frac{24}{30} + nx$, $\frac{18}{30} + px$ haben, und ſollten dieſe Wurzeln den Werth $\frac{55}{30}$ erhalten, ſo müßte $mx = \frac{35}{30}$, $nx = \frac{31}{30}$, $px = \frac{37}{30}$ ſein. Setzt man nun die drei geſuchten Wurzeln $3 - 35x$, $\frac{4}{3} + 31x$, und $\frac{3}{5} + 37x$ ſo werden alle drei Wurzeln genau den Werth $\frac{55}{30}$ oder $\frac{11}{6}$ erhalten, ſo lange $x = \frac{1}{30}$, oder dem Nenner des Bruches gleich iſt, dem ſich die beiden Wurzeln nähern ſollen. Dann müßte aber auch die Summe der drei Quadrate dem dreifachen Quadrat von $\frac{11}{6}$ oder der Zahl $\frac{121}{12} = 10\frac{1}{12}$ gleich ſein. Setzt man aber die Summe der drei Quadrate der Zahl 10 gleich, ſo iſt klar, daß x einen etwas kleineren Werth erhalten muß,

und die erſte Wurzel $3-35x$ wird etwas größer, die beiden andern Wurzeln aber, $\frac{4}{5}+31x$ und $\frac{5}{6}+31x$ werden etwas kleiner als $\frac{11}{6}$ werden, alle drei aber dieſem Werthe ſich bis auf eine Kleinigkeit nähern.

Die Möglichkeit der Auflöſung beruht auch hier darauf, daß, wenn a die gegebene Zahl bezeichnet, $3a+1$ ſich in drei Quadrate zerſtückeln laſſe, alſo entweder ein Quadrat, oder die Summe von zwei oder drei Quadraten ſei. Hierauf bezieht ſich auch die der Aufgabe beigefügte Bedingung. Wäre nämlich a eine Zahl aus der angegebenen Reihe, ſo könnte ſie allgemein durch $2+8n$ vorgeſtellt werden, folglich würde $3a+1=24n+7$, alſo eine Zahl von der Form $8n+7$ ſein. Nun wird, unter andern in Legendre Théorie des nombres S. 336 bewieſen, daß jede ungerade Zahl, mit Ausnahme der Zahlen von der Form $8n+7$, die Summe von drei Quadraten ſei, und Diophantus müßte daher die Zahlen von dieſer Form nothwendig ausſchließen. Daß dieſe Bedingung aber hinreichend ſei, läßt ſich leicht überſehen. Die Zahl $3a+1$ iſt entweder ungerade oder gerade, erſteres wenn a eine gerade, letzteres wenn a eine ungerade Zahl iſt. Wenn nun $3a+1$ ungerade, und nicht zugleich von der Form $8n+7$ iſt, ſo läßt ſie ſich nach dem angeführten Satze bei Legendre gewiß in drei Quadrate theilen. Iſt aber $3a+1$ eine gerade Zahl, ſo muß a ſelbſt eine ungerade Zahl, alſo von der Form

$2n+1$ ſein, wo n eine ungerade Zahl bedeutet. Daher wird $3a+1=6n+4$, alſo das Doppelte einer Zahl von der Form $3n+2$, d. h. einer ungeraden Zahl. Nun wird aber bei Legendre a. a. O. bewieſen, daß jede Zahl, welche das Doppelte einer ungeraden Zahl iſt, ebenfalls die Summe von drei Quadraten ſei. Es iſt alſo einleuchtend, daß die Zahl $3a+1$, inſofern ſie nicht in die bezeichnete Reihe gehört, ſich jedes Mal in drei Quadrate zerſtückeln laſſe, und eben ſo einleuchtend iſt es, daß Diophantus ſowohl dieſen, als den von Euler bewieſenen Satz, daß jede Primzahl von der Form $4n+1$ die Summe zweier Quadrate ſei, genau gekannt haben müſſe. Wer Eulers ſcharfſinnigen, aber auch ſehr umſtändlichen Beweis dieſes Satzes geleſen hat, den muß es mit der höchſten Bewunderung erfüllen, wenn er ſieht, wie weit es Diophantus in der Theorie der Zahlen gebracht hat, ohne die Erleichterung, welche der Gebrauch der Ziffern und der Buchſtabenrechnung den Neuern gewählt.

XV. XVI. XVII.

Die Aufllöſung der drei folgenden Aufgaben iſt im Texte zwar nur angedeutet, aber doch der Gang ſo vollſtändig bezeichnet, daß die Ausführung der Rechnung keine Schwierigkeit haben kann. Doch wird bei XV. vorausgeſetzt, das die um 1 vermehrte Summe der drei gegebenen Zahlen, bei XVI. aber, daß das Doppelte

der gegebenen Zahl die Summe von drei Quadratzahlen ſei. Bei der XVII. Aufgabe kommt es darauf an, die Zahl 30 in vier Quadrate zu theilen, da aber jede Zahl die Summe von *höchſtens vier* Quadratzahlen iſt, ſo kann man jede Zahl in jedem Falle in vier Quadrate zerſtückeln.

Bei der XVII. Aufgabe iſt ein offenbarer Fehler des Textes auch in die Ueberſetzung übergegangen; es heißt nämlich, man müſſe 17 in zwei Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 iſt, und dies könne man dadurch erreichen, daß man 17 in zwei Quadrate theile, *deren jedes größer als* $8\frac{1}{2}$ *und kleiner als* 10 ſei. Daß dies nicht möglich ſei, fällt in die Augen; es iſt dafür zu ſetzen, *deren eines größer* als $8\frac{1}{2}$ und kleiner als 10 iſt, und hiernach iſt auch der griechiſche Text zu berichtigen. Dadurch verſchwindet auch die unangenehme Tautologie in der folgenden Zeile. Uebrigens könnte man die Theilung der Zahl 17 auch ſo beſtimmen: man muß 17 in zwei Quadrate theilen, deren jedes ſich dem Werth $8\frac{1}{2}$ möglichſt nähert.

XVIII.

Wenn man die Summe der drei Zahlen $=x$, die Zahlen ſelbſt $(m^3-1)x^3$, $(n^3-1)x^3$ und $(p^3-1)x^3$ ſetzt, ſo ſind alle Bedingungen der Aufgaben erfüllt.

Aus dieſem Anſatz ergiebt ſich aber

$$(m^3+n^3+p^3-3)x^3=x,$$

alſo $x=\sqrt{\frac{1}{m^3+^3n+p^3-3}}$.

Soll alſo x einen rationalen Werth erhalten, ſo muß $m^3+p^3+p^3-3$ eine Quadratzahl ſein.

Um nun m, n und p ſo zu beſtimmen, daß die obige Bedingung erfüllt wird, ſetzt Diophantus $m=x+1$, $n=2-x$, $p=2$. Bei der Wahl dieſes Anſatzes ſind beſonders zwei Stücke zu berückſichtigen:

1. die Wurzeln müſſen ſo gewählt werden, daß in der Summe ihrer Cubi die Glieder, worin x^3 vorkommt, ſich gegeneinander heben. Daher enthält die eine Wurzel $+x$, die zweite $-x$, und in der dritten kommt gar kein x vor.
2. Die Wurzeln müſſen auch ſo gewählt werden, daß in der Summe der Cubi x^2 einen quadratiſchen Coefficienten erhält, damit ſich die Summe leicht zu einem Quadrat machen laſſe. Nun iſt dieſer Coefficient $3.1+3.2=3(1+2)$, daher mußten die Zahlen 1 und 2 in der erſten und zweiten Wurzel ſo gewählt werden, daß ihre dreifache Summe ein Quadrat wird.

Wenn man endlich die Formel $9x^2-9x+14$ zu einem Quadrat machen ſoll, ſo muß man die Wurzel ſo wählen, daß x kleiner als 2 wird, weil ſonſt die zweite Zahl $2-x$ negativ werden würde. Die geſuchte Wurzel muß aber die Form $3x-n$ haben, und es iſt ſchon

öfters gezeigt worden, wie man n zu wählen habe, damit x die vorgeſchriebene Grenze nicht überſteige.

Endlich ſieht man, daß ſich dies Verfahren auf ſo viele Zahlen, als man will, ausdehnen läßt.

XIX.

Um die Aufgabe in allgemeinen Ausdrücken zu löſen, iſt bloß erforderlich, daß man die Summe der Zahlen durch x, die Zahlen ſelbſt durch $\frac{m^3-1}{m^3}x^3$, $\frac{n^3-1}{n^3}x^3$, $\frac{p^3-1}{p^3}x^3$ ausdrücke; um aber für x einen rationalen Werth zu erhalten, muß die Summe der obigen Coefficienten eine Quadratzahl ſein. Nun iſt die Summe dieſer Coefficienten auch

$$1-\frac{1}{m^3}+1-\frac{1}{n^3}+1-\frac{1}{p^3}=3-\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{p^3}\right).$$

Man muß alſo drei Kubikzahlen ſuchen, deren jede kleiner als 1 iſt, und welche ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man die Summe derſelben von 3 abzieht, der Reſt ein Quadrat wird.

Damit jede der drei Kubikzahlen kleiner als 1 ſei, nimmt Diophantus an, die Summe von allen dreien ſolle kleiner als 1 ſein; er theilt daher 3 in das Quadrat $\frac{9}{4}$, und den Reſt $\frac{3}{4}$, und beſtimmt, daß $\frac{3}{4}$ die Summe der drei Kubikzahlen ſein ſoll. Man muß alſo $\frac{3}{4}$ in drei Kubikzahlen theilen, was man leichter bewirkt,

wenn

wenn man ſtatt $\frac{5}{4}$ den Bruch $\frac{162}{216}$ ſetzt. Denn da nunmehr der Nenner eine Kubikzahl iſt, ſo kommt es bloß darauf an, den Zähler 162 in drei Kubikzahlen zu theilen. Diophantus bemerkt, daß 162 aus dem Cubus 125 und der Zahl 37 beſtehe, welche die Differenz der Kubikzahlen 64 und 27 ſei; eine ſolche Differenz aber laſſe ſich, nach einem bloß im Allgemeinen angeführten Porisma, immer in zwei Kubikzahlen zerſtückeln.

Dadurch iſt nun die Möglichkeit und der Gang der Auflöſung für dieſen beſtimmten Fall deutlich angegeben, denn man nehme an, $\frac{27}{216}$ ſei in zwei Kubikzahlen, c^3 und d^3, zerſtückelt, ſo ſetze man die drei geſuchten Zahlen $\left(1-\frac{125}{216}\right)x^3$, $(1-c^3)x^3$, $(1-d^3)x^3$, und die Summe der Zahlen $=x$. Da nun die Summe der Coefficienten $=\frac{9}{4}$ werden muß, ſo ergiebt ſich

$$\frac{9}{4}x^3 = x, \text{ alſo } x = \frac{2}{3},$$

wofür in der Ueberſetzung durch einen Druckfehler $\frac{3}{3}$ geſetzt iſt. Nimmt man nun c und d als bekannt an, ſo darf man nur den eben berechneten Werth von x in die obigen Ausdrücke ſetzen, um die Aufgabe zu löſen.

Bachet findet bei dieſer Auflöſung noch mancherlei Schwierigkeiten, und hält es für einen bloßen Zufall, daß ſich die Zahl 3 in eine Quadratzahl und drei Ku-

bikzahlen, deren jede kleiner als 1 iſt, zerſtückeln laſſe. Fermat deutet aber folgende wiſſenſchaftliche Auflöſung dieſer Aufgabe an.

Man ſetze das geſuchte Quadrat

$$= (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

und ziehe daſſelbe von der Zahl 3 ab, ſo kommt es darauf an, den Reſt $2x+2-x^2$ in drei Kubikzahlen, deren jede kleiner als 1 iſt, zu zerſtückeln, und dieſe Kubikzahlen muß man ſo bilden, daß die Summe derſelben eine Gleichung von der Form $Ax^n = Bx^{n-1}$ giebt. Man ſetze die erſte der drei Kubikzahlen

$$= \left(1-\frac{1}{3}x\right)^3 = 1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{27}x^3.$$

Man mache hierauf den Cubus von $1+x = 1+3x+3x^2+x^3$, die Summe beider Cubi iſt $2+2x+\frac{10}{3}x^2+\frac{26}{27}x^3$, zieht man dieſe Summe von der Summe der drei geſuchten Kubikzahlen ab, ſo wird die dritte Kubikzahl

$$= -\frac{7}{3}x^2 - \frac{26}{27}x^3.$$

Setzt man die Wurzel derſelben $= -nx$, oder

$$-\frac{7}{3}x^2 - \frac{26}{27}x^3 = -n^3x^3,$$

ſo erhält man für x einen rationalen Werth. Da die dritte Kubikzahl aber negativ iſt, ſo hat man den Ausdruck $2x+2-x^2$ in eine Kubikzahl und in die Differenz zweier anderen Kubikzahlen zerſtückelt. Dieſe Differenz aber läßt ſich nach dem von Diophantus angeführten Porisma, oder nach der Anmerkung zur II. Aufgabe

dieſes Buchs wieder in zwei Kubikzahlen zerſtückeln. Dies iſt die secunda operatio, von welcher Fermat redet, und welche hier um ſo weniger zu entbehren iſt, da der Cubus $(1+x)^3$ größer als 1, alſo für unſeren Zweck nicht zu gebrauchen iſt.

XX.

Bei der Auflöſung der Hülfsaufgabe ſind folgende Punkte zu beachten.

1. Wenn die eine Wurzel $=x$ geſetzt wird, ſo muß die andere nothwendig die Form $n-x$ haben, damit $+x^3$ gegen $-x^3$ ſich hebe.
2. Setzt man die dritte Wurzel $=a$, ſo ſoll zuletzt $3nx^2-3n^2x+n^3+a^3$ zu einem Quadrat gemacht werden, und damit dies gewiß geſchehen könne, muß $3n$ ein Quadrat ſein; dieſen Umſtand muß man alſo bei der Wahl von n ſogleich berückſichtigen.
3. Die Wurzel des obigen Ausdrucks muß die Form $mx-p$ haben, wo $m=\sqrt{3n}$ ſein muß. Aber die Zahl p iſt nicht willkührlich, ſondern ſie muß innerhalb gewiſſer Grenzen gewählt werden. Denn da die eine Wurzel $n-x$ ſein ſoll, ſo muß x nothwendig kleiner als n werden. Will man für unſeren beſtimmten Fall dieſe Grenzen angeben, ſo ſetze man erſt allgemein

$$9x^2-27x+31=(3x-p)^2=9x^2-6px+p^2,$$

alſo $x=\frac{p^2-31}{6p-27}$, und aus der Bedingung $\frac{p^2-31}{6p-27}<3$

folgt $p^2-31<18p-81$. Behandelt man dieſe Formel wie eine vermiſchte quadratiſche Gleichung, in welcher p die unbekannte Größe iſt, ſo findet man, daß p nicht größer ſein kann als 14, 5, aber doch größer ſein müſſe als $\sqrt{31}$, ſo daß man für p alle ganzen Zahlen von 6 bis 14 ſetzen kann.

Uebrigens läßt ſich eben dieſe Auflöſung anwenden, wenn man vier und mehre Zahlen von der hier angegebenen Beſchaffenheit ſuchen ſoll.

XXI.

Da $x=\frac{1}{3}$, ſo wird $x^6=\frac{1}{729}$, und hieraus findet man die erſte Zahl $=\frac{63}{729}$, die zweite $=\frac{15}{729}$, die dritte $\frac{3}{729}$; die Summe von allen dreien iſt die Quadratzahl $\frac{81}{729}$ oder in kleineren Zahlen $\frac{1}{9}$. Addirt man nun den Cubus der Summe, d. i. $\frac{1}{729}$ zu den einzelnen Zahlen, ſo erhält man die Quadratzahlen $\frac{64}{729}$, $\frac{16}{729}$ und $\frac{4}{729}$.

XXII.

Die hier angedeutete Auflöſung der Aufgabe iſt, ſo wie ſie daliegt, kaum zu verſtehen; es geht aber aus den Beziehungen deutlich hervor, daß eine frühere Aufgabe verloren gegangen ſein muß. Eine Verglei-

chung der Bedingungen in der XXI. XXII. und XXIII. Aufgabe führt ſogar auf die Vermuthung, daß nicht eine, ſondern drei Aufgaben zwiſchen der XXI. und der gegenwärtigen fehlen.

Das Gemeinſchaftliche dieſer Aufgaben iſt, daß man drei Zahlen x, y, z ſucht, deren Summe $= s$ eine gewiſſe Eigenſchaft haben ſoll, auch ſollen entweder die Summen oder die Differenzen zwiſchen dem Cubus der Summe und den einzelnen Zahlen Quadrate werden.

Dies giebt aber folgende Fälle:

1. s ſoll ein Quadrat ſein, außerdem aber ſollen s^3+x, s^3+y, s^3+z Quadrate ſein.
2. s ſoll wieder ein Quadrat ſein, auch ſollen s^3-x, s^3-y, s^3-z Quadrate ſein.
3. s ſoll wieder ein Quadrat ſein, auch ſollen $x-s^3$, $y-s^3$, $z-s^3$ Quadrate ſein.
4. s ſoll einer gegebenen Zahl gleich ſein, auch ſollen wie bei der erſten Aufgabe s^3+x, s^3+y, s^3+z Quadrate ſein.
5. s ſoll einer gegebenen Zahl gleich ſein, auch ſollen s^3-x, s^3-y, s^3-z Quadrate ſein.
6. s ſoll einer gegebenen Zahl gleich ſein, auch ſollen $x-s^3$, $y-s^3$, $z-s^3$ Quadrate ſein.

Den erſten Fall betrachtet Diophantus in XXI. den fünften in XXII. den ſechsten in XXIII. und es iſt daher mehr als wahrſcheinlich, daß die mit 2. 3. 4 bezeichneten Aufgaben durch irgend einen Zufall verloren gegangen ſind.

Bachet giebt für die drei Aufgaben eine ganz in Diophantus Sinn gearbeitete, und ſich ganz an den XXII. Satz anſchließende Auflöſung. So wenig es ſonſt in meinem Plane lag, alle Aufgaben einzuſchalten, welche Diophantus hätte bilden können, ſo muß ich doch dieſe drei Auflöſungen mittheilen, weil ſie nicht ſowohl als ein müßiger Zuſatz, ſondern als eine wahre und nothwendige Ergänzung des Diophantiſchen Werkes anzuſehen ſind.

I. Man ſoll drei Zahlen ſuchen, deren Summe ein Quadrat iſt, und welche die Beſchaffenheit haben, daß der Cubus ihrer Summe, wenn man jede Zahl einzeln davon abzieht, ein Quadrat zum Reſte läßt.

Die Summe der Zahlen ſei $=x^2$, die Zahlen ſelbſt aber der Reihe nach $\frac{3}{4}x^6$, $\frac{8}{9}x^6$, $\frac{15}{16}x^6$, denn dadurch wird ſogleich die Bedingung erfüllt, daß der Cubus der Summe oder x^6 ein Quadrat zum Reſte läßt, wenn man die Zahlen einzeln davon abzieht. Die Summe der Zahlen iſt $\frac{371}{144}x^6$, und man erhält alſo die Gleichung

$$\frac{371}{144}x^6 = x^2, \text{ oder } \frac{371}{144}x^4 = 1,$$

die Auflöſung iſt aber in rationalen Zahlen nicht möglich, weil der Coefficient von x^4 kein vollſtändiges Biquadrat iſt. Dieſer Coefficient iſt aber die Summe dreier Zahlen, deren jede ein Quadrat zum Reſte läßt, wenn man ſie von 1 abzieht. Man muß alſo ſtatt der Coefficienten $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{15}{16}$ drei andere Zahlen ſuchen, deren jede ein Quadrat zum

Reſte läßt, wenn man ſie von 1 abzieht, und deren Summe ein vollſtändiges Biquadrat iſt. Die erſte Bedingung kann man auch ſo ausdrücken: wenn man die Summe der drei Zahlen von 3 abzieht, ſo muß der Reſt die Summe von drei Quadraten ſein, deren jedes kleiner als 1 iſt.

Damit nun jede Zahl gewiß kleiner als 1, und ihre Summe gewiß ein Biquadrat werde, ſo ſetze man die Summe der drei Zahlen $=1$, folglich muß der Reſt die Summe von drei Quadraten ſein, und es kommt jetzt alſo darauf an, die Zahl 2 in drei Quadrate zu theilen, deren jedes kleiner als 1 iſt.

Dies läßt ſich aber auf dem Wege der Annäherung bewirken, und man findet z. B. $2 = \frac{16}{25} + \frac{71289}{105625} + \frac{72361}{105625}$. Jedes dieſer Quadrate ziehe man von 1 ab, ſo erhält man die drei Zahlen, welche ſtatt der anfangs beliebig gewählten, und daher nicht zweckmäßigen Coefficienten geſetzt werden müſſen, nämlich $\frac{9}{25}$, $\frac{34336}{105625}$, $\frac{33264}{105625}$. Setzt man alſo die drei geſuchten Zahlen der Reihe nach $\frac{9}{25}x^6$, $\frac{34336}{105625}x^6$, $\frac{33264}{105625}x^6$, die Summe derſelben aber $=x^2$, ſo wird auch jetzt noch die Bedingung erfüllt, daß das Quadrat der Summe, wenn man jedwede Zahl davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reſte läßt. Die Summe der drei Zahlen findet ſich durch Rechnung $=x^6$, ſie iſt aber auch der Annahme nach $=x^2$, alſo hat man die Gleichung $x^6 = x^2$, oder $x^4 = 1$, alſo $x = 1$. Daher

drücken die obigen Coefficienten ſelbſt die drei geſuchten Zahlen aus.

II. Man ſoll drei Zahlen ſuchen, deren Summe ein Quadrat iſt, und welche die Beſchaffenheit haben, daß jede derſelben ein Quadrat wird, wenn man den Cubus ihrer Summe davon abzieht.

Die Summe der drei Zahlen ſei $= x^2$, die Zahlen ſelbſt $2x^6$, $5x^6$, $10x^6$, ſo wird jede ein Quadrat, wenn man den Cubus der Summe oder x^6 davon abzieht. Die Summe der drei Zahlen ſoll x^2 ſein, ſie iſt aber auch $= 17x^6$, man hat alſo die Gleichung:

$$17x^6 = x^2, \text{ oder } 17x^4 = 1.$$

Dieſe Gleichung würde nur dann einen rationalen Werth geben, wenn 17 ein Biquadrat wäre. Die Zahl 17 iſt aber die Summe von drei Quadraten, deren jedes um 1 vergrößert iſt. Ich muß alſo drei Quadrate ſuchen, deren Summe ein Biquadrat wird, wenn man 3 dazu addirt, oder, was einerlei iſt, von irgend einem Biquadrat 3 abziehen, und den Reſt in drei Quadrate theilen. Man nehme z. B. das Biquadrat 16, ſo kommt es darauf an, 13 in drei Quadrate zu theilen z. B. in $9, \frac{36}{25}, \frac{64}{25}$. Nun addire man zu jedem dieſer Quadrate 1, und ſetze die geſuchten Zahlen $10x^6$, $\frac{61}{25}x^6$, $\frac{89}{25}x^6$. Nun iſt die Summe der Zahlen $16x^6 = x^2$, alſo $x = \frac{1}{2}$; die geſuchten Zahlen ſind alſo $\frac{10}{64}, \frac{61}{1600}, \frac{89}{1600}$. Die

Summe dieſer Zahlen iſt $\frac{1}{4}$, alſo ein Quadrat, der Cubus der Summe iſt $\frac{1}{64}$, und zieht man dieſen von den drei gegebenen Zahlen ab, ſo erhält man die Quadrate $\frac{9}{64}$, $\frac{9}{400}$, $\frac{1}{25}$.

III. Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit ſuchen, daß die Summe derſelben einer gegebenen Zahl gleich wird, der Cubus dieſer Summe aber ein Quadrat wird, wenn man jede Zahl einzeln dazu addirt.

Die gegebene Zahl, welcher die Summe der Zahlen gleich werden ſoll, ſei 2, ihr Cubus alſo 8. Es kommt alſo bloß darauf an, die Zahl 2 in drei Stücke zu theilen, daß jedes derſelben ein Quadrat wird, wenn man 8 dazu addirt; daher muß $2+3.8=26$ die Summe von drei Quadraten ſein, deren jedes größer als 8 iſt. Wie dies zu bewirken ſei, iſt aus dem Vorigen klar, und man findet die drei Quadrate 9, $\frac{1038361}{121801}$, $\frac{1032256}{121801}$. Zieht man von jedem dieſer Quadrate die Zahl 8 ab, ſo erhält man die drei geſuchten Zahlen 1, $\frac{63953}{121801}$, $\frac{57848}{121801}$.

Nimmt man nun an, daß die letzte Aufgabe unmittelbar vor der XXII. Aufgabe vorher ging, und daß auch hier die gegebene Zahl 2 war, ſo iſt alles vollkommen verſtändlich. Von dem Cubus der Summe oder von 8 ſoll jede der geſuchten Zahlen einzeln abgezogen

werden, und die Reſte ſollen Quadrate ſein. Wenn man alſo von $3.8=24$ die Summe der Zahlen oder 2 abzieht, ſo muß der Reſt 22 die Summe von drei Quadraten ſein; man muß alſo die Zahl 22 in drei Quadrate theilen, deren jedes größer als 6 ſein muß, damit jede der geſuchten Zahlen kleiner als 2 werde, aber auch kleiner als 8 ſein muß, damit man daſſelbe von 8 abziehen kann.

XXIII.

Dieſe Aufgabe verlangt, eine gegebene Zahl ſo zu theilen, daß jeder Theil, wenn man den Cubus der Summe davon abzieht, wieder ein Quadrat wird. Da alſo der Cubus der Zahl kleiner ſein ſoll, als ein einzelner Theil derſelben, ſo kann die gegebene Zahl nur ein Bruch ſein. Das Verfahren ſelbſt iſt zwar nur angedeutet, ergiebt ſich aber leicht aus folgender Betrachtung.

Die Summe der drei geſuchten Brüche iſt $\frac{1}{4}$, der Cubus der Summe alſo $\frac{1}{64}$. Zieht man von jedem Stück $\frac{1}{64}$, oder von der Summe aller drei Stücke d. i. von $\frac{1}{4}$ den Bruch $\frac{3}{64}$ ab, ſo muß der Reſt $\frac{13}{64}$ die Summe von drei Quadraten ſein. Man theile daher $\frac{13}{64}$ in drei Quadrate, was hier darum ganz leicht iſt, weil $\frac{13}{64}$ die

Summe von zwei Quadraten $\frac{9}{64}$ und $\frac{4}{64}$ iſt, von denen eines z. B. das letztere noch in die Quadrate $\frac{9}{400}$ und $\frac{16}{400}$ getheilt werden kann. Zu jedem dieſer Quadrate addire man $\frac{1}{64}$, ſo erhält man $\frac{250}{1600}$, $\frac{61}{1600}$, $\frac{89}{1600}$. Die Summe dieſer drei Brüche iſt die gegebene Zahl $\frac{1}{4}$, und zieht man von jedem $\frac{1}{64}$ ab, ſo erhält man die vorhin berechneten Quadrate.

XXIV.

1. Bei dem Anſatz kommt es zuerſt darauf an, daß man drei Quadratzahlen habe, deren jede wieder ein Quadrat wird, wenn man 1 dazu addirt. Solche Zahlen findet man aber ſehr leicht vermittelſt rechtwinkliger Dreiecke, denn wenn man das Quadrat der einen Kathete durch das Quadrat der anderen dividirt, ſo hat der auf dieſe Weiſe entſtandene Quotient alle Mal die verlangte Eigenſchaft. Denn das Dreieck ſei von den Zahlen a und b gebildet, ſo iſt die eine Kathete $= a^2 - b^2$, die andere $= 2ab$. Nimmt man nun den Quotienten $\frac{(a^2-b^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{4a^2b^2}$, und addirt zu demſelben $1 = \frac{4a^2b^2}{4a^2b^2}$, ſo erhält man $\frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{4a^2b^2}$, oder das Quadrat von $\frac{a^2+b^2}{2ab}$.

2. Diophantus nimmt nun drei rechtwinklige Dreiecke, nämlich

3. 4. 5; 5. 12. 13; 8. 15. 17;

und findet daraus die Zahlen $\frac{9}{16}$, $\frac{25}{144}$, $\frac{64}{225}$. Er ſetzt daher die drei geſuchten Quadrate der Reihe nach $\frac{9}{16}x^2$, $\frac{25}{144}x^2$, $\frac{64}{225}x^2$, das Produkt dieſer drei Zahlen aber $=x^2$. Addirt man zu dieſem Produkte das erſte der obigen Quadrate, ſo erhält man $\frac{25}{16}x^2$, addirt man das zweite, ſo erhält man $\frac{196}{144}x^2$, addirt man das dritte, ſo erhält man $\frac{289}{225}x^2$, folglich in allen drei Fällen ein Quadrat, wie es die Aufgabe verlangt.

3. Wenn man aber x^2 als das Produkt der drei obigen Quadrate anſieht, ſo erhält man die Gleichung

$$\frac{9.\ 25.\ 64.}{16.\ 144.\ 225.}x^6 = x^2, \text{ alſo } \frac{3.\ 5.\ 8.}{4.\ 12.\ 15.}x^2 = 1.$$

Um nun für x einen rationalen Werth zu erhalten, müßte der Bruch $\frac{4.\ 12.\ 15.}{3.\ 5.\ 8.}$ ein Quadrat ſein, man ſieht aber leicht, daß 3.5.8 = 120 das Produkt aus ſämmtlichen Lothen, 4.12.15 = 720 das Produkt aus ſämmtlichen Grundlinien der vorhin gewählten rechtwinkligen Dreiecke iſt. Man muß alſo ſtatt jener Dreiecke drei andere von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt der Lothe zu dem Produkt der Grundlinien ſich wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhält, oder wie Diophantus

dieſe Bedingung ausdrückt, daß das Produkt ſämmtlicher Lothe mit dem Produkt ſämmtlicher Grundlinien multiplicirt, wieder ein Quadrat zum Produkte giebt.

4. Bis dahin iſt die Darſtellung im Texte vollkommen deutlich und vollſtändig, das Uebrige iſt aber mehr angedeutet, als ausgeführt, und in die Zahlen ſelbſt haben ſich einige Irrthümer eingeſchlichen. Der Text iſt aber keinesweges ſo entſtellt, als es Bachet geglaubt hat, der eine Wiederherſtellung deſſelben ohne Hülfe eines beſſeren Codex für völlig unmöglich erklärt. Die nachſtehende Darſtellung wird hoffentlich alle Schwierigkeiten heben.

Wenn man das Produkt ſämmtlicher Lothe L.l.λ mit dem Produkt ſämmtlicher Grundlinien G.g.γ multiplicirt, ſo hat dies neue Produkt L.l.λ.G.g.γ das Produkt aus dem Loth und der Grundlinie des einen dieſer Dreiecke z. B. L.G zu einem ſeiner Factoren. Dies iſt an ſich ſelbſt klar, im Griechiſchen ſteht aber πλευρὰ, welches nicht bloß die Wurzel einer Potenz, ſondern auch jeden Factor einer Flächenzahl oder einer Körperzahl bedeutet (Euklides VII. Erkl. 16. 17); weil Bachet aber nur an die erſte Bedeutung, als die gewöhnlichſte dachte, ſo bezeichnete er ſchon dieſe vollkommen richtige Stelle als verderbt.

Wenn wir nun das Produkt aus den ſämmtlichen Lothen und den ſämmtliche Grundlinien, welches wir durch L.l.λ.G.g.γ bezeichnet haben, durch das Product aus der Grundlinie und dem Loth des einen Dreiecks, etwa

durch L.G dividiren, ſo erhalten wir ein Produkt l.λ.g.γ, welches das Produkt aus dem Loth und der Grundlinie des erſten Dreiecks z. B. l.g und das Produkt aus der Grundlinie und dem Loth des anderen Dreiecks λ.γ zu ſeinen Factoren hat. Auch dieſer Schluß iſt vollkommen richtig, und im griechiſchen Texte weiter kein Fehler, als daß ſtatt der Worte: τοῦ πρώτου τριγώνου die Abkürzung του α̂ δ ſteht, wofür τοῦ α̂. τ. zu leſen iſt. Daß Diophantus übrigens dieſe beiden Dreiecke das erſte und zweite nennt, iſt eine völlig gleichgültige Sache.

Von den drei geſuchten rechtwinkligen Dreiecken kann man alſo eines, dasjenige nämlich deſſen Loth und Grundlinie wir oben durch L und G bezeichnet haben, willführlich annehmen, und dann die beiden andern ſo beſtimmen, daß L.l.λ.G.g.γ ein Quadrat wird. Das erſte Dreieck ſei alſo 3.4.5, alſo das Produkt aus dem Loth und der Grundlinie =12. Die beiden andern Dreiecke müſſen daher ſo beſtimmt werden, daß lg : λγ, folglich auch die Fläche des einen zur Fläche des andern ſich wie x : 12x verhalte, denn wenn dies der Fall iſt, ſo wird das Produkt aus ſämmtlichen Lothen und ſämmtlichen Grundlinien =12x.12x, alſo gewiß ein Quadrat.

Anſtatt aber die Größen lg und λγ in dem Verhältniß x : 12x oder 1 : 12 zu nehmen, kann man ſie

auch in dem Verhältniſſe 1:3 nehmen. Dieſer Schluß iſt im Griechiſchen mit vier Worten ausgedrückt, die Richtigkeit deſſelben fällt aber ſogleich in die Augen; denn wenn $lg=x$, $\lambda\gamma=3x$ iſt, ſo iſt

$$L.l.\lambda.G.g.\gamma. = 12.x.3.x,$$

welches ebenfalls ein Quadrat iſt.

6. Es kommt alſo bloß darauf an, zwei rechtwinklige Dreiecke zu ſuchen, deren Flächen ſich wie $x:3x$ oder wie 1: 3 verhalten. Auf welche Weiſe dieſe Hülfsaufgabe gelöſ't wird, zeigt Diophantus nicht, ſondern bemerkt nur, ſie habe keine Schwierigkeit, und wir wollen die allgemeine Auflöſung dieſer Aufgabe am Schluſſe dieſer Anmerkung angeben. Diophantus führt nun die Dreiecke 9.40.41 und 5.12.13 als ſolche an, welche die verlangte Eigenſchaft haben. Es iſt aber klar, daß die letzteren Zahlen falſch, und mit den Zahlen eines der zuerſt gewählten Dreiecke verwechſelt ſind. In der Randanmerkung werden ſchon von Bachet die Zahlen 8, 15, 17 als diejenigen angegeben, welche für unſeren Zweck brauchbar ſind.

7. Der aus den unrichtigen Zahlen 5, 12, 13 entſtandene Fehler iſt nun auch in den berichtigten Anſatz übergegangen, und außerdem ſind die Nenner der Brüche und die Hauptgröße x^2 weggelaſſen. Setzt man, wie im Texte geſchehen iſt, die drei Zahlen $\frac{9}{16}x^2$, $\frac{25}{144}x^2$, $\frac{81}{1600}x^2$,

denn dieſe werden durch die Zähler 9, 25, 81 angedeutet, ſo erhält man die Gleichung:

$$\frac{9.\ 25.\ 81}{16.\ 144.\ 1600}x^4 = 1, \text{ oder } \frac{3.\ 5.\ 9}{4.\ 12.\ 40}x^2 = 1.$$

Da aber dieſer Coefficient kein Quadrat iſt, ſo läßt ſich der Werth von x nicht in rationalen Zahlen ausdrücken.

Man ſetze aber ſtatt des Dreiecks 5. 12. 13 das richtige 8, 15, 17, ſo ſind die drei geſuchten Zahlen der Reihe nach $\frac{9}{16}x^2$, $\frac{64}{225}x^2$, $\frac{81}{1600}x^2$. Setzt man nun das Produkt dieſer drei Zahlen $= x^2$, ſo erhält man zuletzt die Gleichung

$$\frac{3.\ 8.\ 9}{4.\ 15.\ 40}x^2 = 1.$$

Hier iſt nun zwar der Coefficient kein Quadrat, aber Zähler und Nenner verhalten ſich wie zwei Quadrate, und wenn man daher in beiden die gleichen Factoren hebt, ſo erhält man

$$\frac{9}{100}x^2 = 1, \text{ folglich } x = \frac{10}{3}.$$

Die drei geſuchten Quadrate ſind alſo der Reihe nach $\frac{25}{4}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{256}{81}$, das Produkt von allen dreien iſt $\frac{100}{9}$, und wenn man zu dieſem Produkt die drei Quadrate einzeln addirt, ſo erhält man der Reihe nach die Quadrate $\frac{625}{36}$, $\frac{1681}{144}$, $\frac{1156}{81}$.

8. Nachdem ich dies geſchrieben, fällt mir noch ein, auf welche Weiſe das unrichtige Dreieck 5. 12. 13 in den

den Text gekommen iſt. Diophantus hat zuerſt drei rechtwinklige Dreiecke willkührlich gewählt, nämlich

I. 3. 4. 5. II. 5. 12. 13. III. 8. 15. 17.

Die angeſtellte Betrachtung ergiebt, daß dieſe Dreiecke zur Auflöſung der Aufgabe nicht zu gebrauchen ſind, daß man aber eines derſelben z. B. das erſte behalten, die beiden übrigen aber ſo beſtimmen muß, daß ihre Flächen ſich wie 1:12, oder auch nur wie 1:3 verhalten. Nun ergiebt ſich, daß man um dieſen Zweck zu erreichen, auch das dritte Dreieck 8, 15, 17 beibehalten, ſtatt des zweiten 5, 12, 13 aber ein anderes 9, 40, 41 ſetzen muß. Diophantus hatte alſo vermuthlich geſchrieben, das geſuchte Dreieck iſt 9, 40, 41, das andere aber, dasjenige nämlich, welches wir als unbrauchbar verwerfen müſſen, war 5, 12, 13. Der Abſchreiber, welcher nicht bemerkte, daß nur ein Dreieck zu ſuchen war, hielt aber 5, 12, 13 für das zweite der geſuchten Dreiecke, und ſetzte auch die dieſem Dreieck zugehörigen Zahlen in den neuen Anſatz, und da die Rechnung nicht durchgeführt, ſondern bloß angedeutet iſt, ſo entging ihm, daß die Zahlen auf einen irrationalen Werth führen.

9. Ich gebe hier zuletzt die Auflöſung der Aufgabe: zwei rechtwinklige Dreiecke zu ſuchen, deren Flächen ein beſtimmtes Verhältniß zu einander haben z. B. das Verhältniß m:1, wo m eine ganze Zahl bedeutet.

Man bilde das eine Dreieck von den Zahlen 2m+1 und m−1, das andere aber von den Zahlen m+2

und $m-1$, ſo wird die Fläche des erſten zu der Fläche des zweiten ſich wie $m:1$ verhalten.

Die Katheten des erſten Dreiecks werden nämlich $4m^2-2m-2$ und $3m^2+6m$, folglich die Fläche des Dreiecks $6m^4+9m^3-9m^2-6m$. Die Katheten des zweiten Dreiecks werden $2m^2+2m-4$ und $6m+3$, folglich die Fläche deſſelben $6m^3+9m^2-9m-6$, und die Fläche des erſten verhält ſich zur Fläche des zweiten wie $m:1$. Iſt nun $m=3$, ſo iſt das erſte Dreieck von den Zahlen 7 und 2 zu bilden, und hat alſo die Seiten 28, 45, 53, das zweite von den Zahlen 5 und 2, und hat die Seiten 20, 21, 29. Die Fläche des erſten iſt 630, die des zweiten 210, alſo die erſte gerade das Dreifache des zweiten. Legt man dieſe Dreiecke zum Grunde, ſo erhält man

$$\frac{28.\ 28.\ 20.\ 20.\ 3.\ 3.}{45.\ 45.\ 21.\ 21.\ 4.\ 4.}x^4 = 1.$$

und daraus $\frac{28.\ 20.\ 3.}{45.\ 21.\ 4.}x^2 = 1.$

Hebt man die gleichen Factoren des Zählers und Nenners, ſo erhält man

$$\frac{4}{9}x^2 = 1 \text{ oder } 4x^2 = 9, \text{ alſo } x = \frac{3}{2}.$$

XXV.

Wenn man das Produkt der drei Zahlen $=x^2$ ſetzt, ſo kann man die Zahlen ſelbſt durch x^2 und einen quadratiſchen Coefficienten ausdrücken, der von 1 abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reſte läßt. Solche Coeffici-

enten findet man aber leicht, wenn man drei rechtwinklige Dreiecke nimmt, z. B. 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; und nun das Quadrat der einen Kathete durch das Quadrat der Hypotenuſe dividirt. Diophantus drückt daher die drei Zahlen durch $\frac{16}{25}x^2$, $\frac{25}{169}x^2$ und $\frac{64}{289}x^2$ aus; zieht man dieſe Zahlen einzeln von 1 ab, ſo ſind die Reſte $\frac{9}{25}x^2$, $\frac{144}{169}x^2$, $\frac{225}{289}x^2$ wieder Quadrate, und die Hauptbedingung der Aufgabe iſt durch den bloßen Anſatz erfüllt.

Nun ſoll aber das Produkt der drei Zahlen $=x^2$ ſein, und dies giebt die Gleichung

$$\frac{16.\ 25.\ 64}{25.\ 169.\ 289}x^6 = x^2, \text{ oder } \frac{16.\ 25.\ 64}{25.\ 169.\ 289}x^4 = 1.$$

Soll nun x einen rationalen Werth erhalten, ſo muß der Coefficient von x^4 ein Biquadrat, d. h. die Quadratwurzel dieſes Coefficienten oder $\frac{4.\ 5.\ 8}{5.\ 13.\ 17}$ muß wieder ein Quadrat ſein. Hieraus ſieht man alſo, daß die rechtwinkligen Dreiecke, von welchen Diophantus ſeine Coefficienten entnommen, und welche er aus der vorigen Aufgabe beibehalten hat, für den jetzigen Zweck nicht brauchbar ſind, und man muß ſtatt derſelben drei andere von der Beſchaffenheit ſuchen, daß das Produkt der drei Katheten (4.5.8) durch das Produkt der drei Hypotenuſen (5.13.17) multiplicirt oder dividirt, wieder ein Quadrat giebt.

Man bezeichne die drei Lothe durch L, l, λ, die drei Hypotenuſen durch H, h, γ, ſo ſoll L.l.λ.H.h.γ ein Quadrat ſein. Man nehme eines der Dreiecke, z. B. dasjenige, in welchem λ und γ vorkommen als bekannt an, und ſetze z. B. das Dreieck: 3, 4, 5, ſo wird $\lambda.\gamma = 20$. Nun kommt es darauf an, die beiden anderen Dreiecke ſo zu beſtimmen, daß 20.L.H.l.h ein Quadrat wird, und dies wird der Fall ſein, wenn $L.H = 20.l.h$, oder, weil 20 ein Produkt aus 5 und der Quadratzahl 4 iſt, wenn $LH = 5hl$ iſt, denn in dieſem Falle wird

$$L.l.\lambda.H.h.\gamma = 4.5.5.h.l.h.l,$$

alſo gewiß ein Quadrat.

Es kommt alſo bloß darauf an, zwei rechtwinklige Dreiecke von der Art zu finden, daß das Produkt aus der Hypotenuſe und dem Lothe des einen zu dem Product aus der Hypotenuſe und dem Lothe des anderen ſich wie 5:1 verhalten.

Bis dahin iſt die Darſtellung im Texte vollkommen klar und richtig; auf welche Weiſe Diophantus aber die Zwiſchenaufgabe löſ't, das iſt aus dem ganz verderbten Texte nicht zu entnehmen; ich habe daher dieſe Stelle gar nicht überſetzt, und die Lücke bloß angedeutet, theile aber den griechiſchen Text ſo mit, wie ich ihn in Bachets Ausgabe finde:

καὶ ἔϛι ῥάδιον, καὶ ἔϛι τὸ μὲν μεῖζον ε̄. ιβ̄. ιγ̄. τὸ δὲ ἔλαττον γ̄. δ̄. ε̄. ζητητέον οὖν ἀπὸ τούτων ἕτερα δύο, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης

καὶ καθέτου ἡ μ° ϛ̄. ἔςι δὲ τοῦ μὲν μείζονος ὑποτείνουσα μ° ϛ̄. ᾱ^{β}· ἡ δὲ κάθετος ξ̄. τοῦ δὲ ἐλάσσονος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μ° β. ᾱ^{β}. ὁ δὲ ἐν τῇ ᾱ. τῶν ὀρθογώνων ιβ̄.

Die Auflöſung der Aufgabe findet man übrigens vollſtändig in Bachets Porismen zum Diophantus, und iſt im Weſentlichen nicht von derjenigen verſchieden, welche ich hier mittheile. Man nehme das einfachſte rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5, und bilde aus der Grundlinie 4 und dem doppelten Lothe deſſelben, oder aus 2.3 ein neues rechtwinkliges Dreieck; dies hat die Seiten

$$20 = 2.2.3.3 - 4.4 = 4(3.3 - 4) = 4.5.$$
$$48 = 2.2.3.4 \qquad = 4(2.2.3) = 4.12.$$
$$52 = 2.2.3.3 + 4.4 = 4(3.3 + 4) = 4.13.$$

Nunmehr hat man die beiden rechtwinkligen Dreiecke 3, 4, 5 und 5, 12, 13 und zwar dieſelben, welche Diophantus zum Grunde legt, um die für den Anſatz zweckmäßigen Dreiecke zu finden. Bildet man nämlich aus den Katheten dieſer beiden Dreiecke zwei neue, ſo hat das erſte die Seiten

$$7 = 4.4 - 3.3$$
$$24 = 2.3.4$$
$$25 = 4.4 + 3.3.$$

Das zweite aber die Seiten

$$119 = 144 - 25$$
$$120 = 2.5.12$$
$$169 = 144 + 25$$

und wenn man nun die Coefficienten von dem Dreieck 3, 4, 5 und den zuletzt gefundenen beiden Dreiecken entnimmt, d. h. wenn man die geſuchten Zahlen durch $\frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5}x^2$, $\frac{24 \cdot 24}{25 \cdot 25}x^2$ und $\frac{120 \cdot 120}{169 \cdot 169}x^2$ ausdrückt, ſo haben dieſe Zahlen die Eigenſchaft, daß, wenn man ſie einzeln von x^2 abzieht, der Reſt noch immer ein Quadrat bleibt, und wenn man das Produkt der drei Zahlen $= x^2$ ſetzt, ſo erhält man zuletzt

$$\frac{4 \cdot 24 \cdot 120}{5 \cdot 25 \cdot 169}x^2 = 1, \text{ und } x = \frac{65}{48},$$

woraus ſich die Zahlen ſelbſt leicht berechnen laſſen.

Daß Diophantus wirklich die hier gefundenen Dreiecke zum Grunde gelegt habe, iſt mir darum ſehr wahrſcheinlich, weil ſeine Zahlen mit den aus der Rechnung ſich ergebenden, die ich auch in die Ueberſetzung aufgenommen habe, ganz übereinſtimmen, wenn man nur darauf Rückſicht nimmt, daß bei Diophantus häufig die Nenner der Brüche fehlen. Die erſte geſuchte Zahl iſt bei mir $\frac{16}{25}x^2$, wofür bei Diophantus bloß $16x^2$ ſteht, die zweite $\frac{24 \cdot 24}{25 \cdot 25}x^2 = \frac{576}{625}x^2$, wofür bei Diophantus bloß $576x^2$ geſetzt iſt, die dritte endlich $\frac{120 \cdot 120}{169 \cdot 169}x^2 = \frac{14400}{28561}x^2$, wofür bei Diophantus $\frac{x^2}{28561}$ geſetzt iſt, der Werth von x aber wird $\frac{65}{48}$, wofür abermals mit Weglaſſung des Nenners bloß 65 ſteht, offenbar durch ein bloßes Verſehen des Abſchreibers.

Es iſt jetzt nur noch zu zeigen, daß der Coefficient von x^2 in der Endgleichung oder die Zahl $\frac{4.24.120}{5.25.169}$ nicht zufällig einen rationalen Werth für x giebt, ſondern daß nach der Conſtruction der obigen Dreiecke Zähler und Nenner ſich wie zwei Quadrate verhalten. Nach der oben angedeuteten Entſtehungsart der Dreiecke iſt aber

$$5.25.169 = 5.25.13.13.$$
$$4.24.120 = 4.(2.3.4)(2.5.3.4)$$

Dividirt man nun beide Zahlen durch 5, ſo wird ſowohl der Zähler als der Nenner ein vollſtändiges Quadrat, weil jeder Factor in einer geraden Anzahl vorkommt, und man kann daher aus dem Bruche $\frac{5.25.169}{4.24.120} = \frac{25.169}{4.24.24}$ die Quadratwurzel ausziehen.

XXVII. XXVIII. XXIX.

Die XXVII. Aufgabe wird, wie die beiden folgenden, auf frühere Aufgaben zurückgeführt, und wir wollen daher zeigen, daß Zahlen, welche der XXIV. Aufgabe genügen, auch die in XXVII. verlangte Eigenſchaft haben. Ich nehme daher die Quadrate a^2, b^2, c^2 von der Beſchaffenheit, daß $a^2b^2c^2+a^2$, $a^2b^2c^2+b^2$, $a^2b^2c^2+c^2$ noch immer ein Quadrat bleibt. Dividirt man nun die erſte Formel durch a^2, ſo erhält man b^2c^2+1; dividirt man die zweite durch b^2, ſo erhält man a^2c^2+1, und dividirt man die dritte durch c^2,

ſo erhält man a^2b^2+1. Da in allen drei Fällen ſowohl der Diviſor als der Dividendus ein Quadrat war, ſo ſind auch die Quotienten b^2c^2+1, a^2c^2+1, a^2b^2+1 wieder Quadrate, und die Zahlen c^2, b^2, c^2 leiſten alſo auch der XXVII. Aufgabe Genüge.

Auf dieſelbe Weiſe läßt ſich auch zeigen, daß die Zahlen, die in der XXV. und XXVI. Aufgabe gefunden worden ſind, auch der in XXVIII. und XXIX. geforderten Bedingung genügen.

XXX. — XXXI.

Nachdem Diophantus das eine der geſuchten Quadrate beliebig gewählt hat, ſo verwandelt ſich die ganze Aufgabe in folgende: man ſoll zwei Quadrate y^2 und z^2 von der Beſchaffenheit ſuchen, daß y^2+24, z^2+24, y^2+z^2+15 Quadrate ſind. Er berückſichtigt aber anfangs nur die beiden erſten Bedingungen, und hier ergiebt ſich leicht Folgendes; wenn man das Quadrat einer zweitheiligen Größe hat, in welchem -12 das doppelte Produkt beider Theile iſt, und man addirt dazu 24, ſo wird das Quadrat die vorige Form behalten, und nur das doppelte Produkt aus -12 ſich in $+12$ verwandeln, alſo das Quadrat der Differenz in das Quadrat der Summe zweier Größen übergehen. Um alſo y^2 und z^2 zu beſtimmen, mußte das Quadrat einer Differenz genommen, die beiden Theile der Wurzel aber ſo beſtimmt werden, daß das doppelte Produkt -12

wurde. Um dies zu bewirken, zerfällt Diophantus die Zahl 24 in die Factoren 4×6 und 3×8, und verbindet dieſe mit der Hauptgröße x dergeſtalt, daß ihr Produkt noch immer 24 bleibt, dies giebt die Factoren $6x$ und $\frac{4}{x}$, ferner $8x$ und $\frac{3}{x}$. Nimmt man nun die Hälfte jedes Factors, und bildet davon die Wurzeln $3x-\frac{2}{x}$ und $4x-\frac{3}{2x}$, ſo erhält man

$$y^2=9x^2-12+\frac{4}{x^2},\quad z^2=16x^2-12+\frac{9}{4x^2}$$

folglich $y^2+24=9x^2+12+\frac{4}{x^2}=\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2$, und

$$z^2+24=16x^2+12+\frac{9}{4x^2}=\left(4x+\frac{3}{2x}\right)^2,$$

wodurch die erſte Bedingung bereits erfüllt wird.

Die Factoren 4, 6, 3, 8 dürfen aber nicht willkührlich gewählt werden, ſondern ſie müſſen nach der im Text enthaltenen Bemerkung von der Art ſein, daß ſie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks vorſtellen können, d. h. die Summe ihrer Quadrate muß wieder ein Quadrat ſein, denn die zweite Bedingung verlangt, daß y^2+z^2+15 d. i. $25x^2-9+\frac{25}{4x^2}$ auch ein Quadrat ſei. Dies erreicht Diophantus leicht, indem er den ganzen Ausdruck $=25x^2$ ſetzt, denn nunmehr heben ſich zwei Glieder, und man erhält $\frac{25}{4x^2}=9$, alſo für x den den rationalen Werth $\frac{5}{6}$. Damit dies Verfahren aber möglich wurde, mußte jedes Glied in der zuletzt gefundenen

Formel ein Quadrat ſein. Nun iſt $9 = 24 - 15$, alſo dem zu Anfang der Auflöſung beliebig gewählten Quadrate gleich; ferner iſt $25x^2 = 16x^2 + 9x^2$, und $\frac{25}{4x^2} = \frac{9}{4x^2} + \frac{4}{x^2} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{4x^2}$, beide Formeln werden alſo nur dadurch Quadrate, daß die Summe $16 + 9$ ein Quadrat iſt, oder daß die Factoren 6 und 8, folglich auch ihre Hälften 3 und 4, aus welchen man die Wurzeln von z^2 und y^2 gebildet hat, Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ſind.

Unter den verſchiedenen Zerfällungen welche die Zahl 24 zuläßt, waren alſo nur die hier gewählten zweckmäßig, weil ſie Factoren giebt, welche den Zahlen 3 und 4 proportional ſind, und daher, wie dieſe, Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks vorſtellen können. Aus $x = \frac{5}{6}$ findet man die kleinere Wurzel $= \frac{1}{10}$, die größere $= \frac{23}{15}$, die Zahlen ſind alſo 9, $\frac{1}{100}$, $\frac{529}{225}$. Die Auflöſung der XXXI. Aufgabe beruht auf ganz ähnlichen Betrachtungen.

XXXIII.

Wenn man die Zahl der gekauften Maaße $= x$ ſetzt, ſo kommt es vorzüglich nur auf zwei Stücke an:

1. die Zahl $x^2 - 60$ in zwei Stücke zu theilen, und zwar ſo, daß ein Fünftel des einen, und ein Achtel des anderen die Summe x giebt,
2. die Zahl $x^2 - 60$ zu einem Quadrat zu machen.

Das Letztere hat gar keine Schwierigkeit, denn wenn man die Wurzel $= x - n$ ſetzt, ſo wird

$$x^2 - 60 = x^2 - 2nx + n^2, \text{ und } x = \frac{n^2 + 60}{2n},$$

und inſofern man bloß auf dies letzte Stück der Auflöſung ſieht, könnte man die Zahl n ganz beliebig wählen, wenn nur der für x gefundene Werth, ins Quadrat erhoben, größer als 60 wird, damit x^2-60 poſitiv bleibe. Die Zerſtückelung aber, die man nachher mit der Zahl x^2-60 vornehmen ſoll, ſetzt nach der V. Aufgabe des erſten Buches voraus, daß x größer als $\frac{x^2-60}{8}$ und kleiner als $\frac{x^2-60}{5}$ ſei. Aus dieſen Bedingungen aber folgt

$$x^2-8x<60 \text{ und } x^2-5x>60.$$

Betrachtet man beide Formeln als vermiſchte quadratiſche Gleichungen, ſo erhält man aus der erſten

$$x=4+\sqrt{76}=12{,}72\ldots.$$

und aus der zweiten

$$x=\frac{5+\sqrt{265}}{2}=10{,}78\ldots.$$

Nun iſt der erſte Werth für x offenbar zu groß, denn ſollte der Ausdruck $x^2-8x<60$ eine wirkliche Gleichung bilden, ſo müßte man ſtatt 60 eine etwas kleinere Zahl ſetzen, wodurch x einen kleineren Werth erhält; und aus einem ähnlichen Grunde iſt der zweite für x gefundene Werth etwas zu klein. Will man daher die Grenzen für x durch ganze Zahlen angeben, ſo kann man allerdings ſagen, x müſſe größer als 11 und kleiner als 12 ſein, wiewohl die Rechnung zeigt, daß x noch etwas kleiner als 11, und auch noch etwas größer als 12 ſein könnte.

Hiernach ſoll nun beſtimmt werden, innerhalb welcher Grenzen die Zahl n in der Wurzel $x - n$ zu nehmen ſei. Zu dieſem Ende überlegt Diophantus zuerſt, wie der Werth von x gefunden werde, und ſpricht zuletzt in Worten aus, was die obige Formel $x = \frac{n^2+60}{2n}$ in allgemeinen Zeichen ausdrückt. Hieraus folgt aber

$$\frac{n^2+60}{2n} > 11, \text{ und } \frac{n^2+60}{2n} < 12, \text{ oder}$$

$$n^2 - 22n > -60 \text{ und } n^2 - 24n < -60.$$

Betrachtet man beide Formeln als vermiſchte quadratiſche Gleichungen, ſo findet man aus der erſten

$$n = 11 + \sqrt{61} = 18{,}8\ldots.$$

und aus der zweiten

$$n = 12 + \sqrt{84} = 21{,}16\ldots.$$

Der aus der erſten Gleichung gefundene Werth iſt offenbar zu klein, denn um die Formel $n^2 - 22n > -60$ in eine Gleichung zu verwandeln, hätte man zu -60 noch eine gewiſſe Zahl addiren müſſen, und dadurch würde x offenbar gröſſer werden; aus einem ähnlichen Grunde aber iſt der aus der zweiten Formel gefundene Werth etwas zu groß. Will man daher die Grenzen für n wieder durch zwei ganze Zahlen ausdrücken, ſo muß n kleiner als 21, und gröſſer als 19 ſein, d. h. man muß die Wurzel von $x^2 - 60 = x - 20$ ſetzen.

Ueber den Anhang zum fünften Buche.

Das in der vorigen Aufgabe mitgetheilte Epigramm veranlaßte Bachet noch 45 ähnliche Epigramme aus einer damals noch ungedruckten Handſchrift, welche er von Salmaſius erhalten hatte, mitzutheilen. Dieſe Epigramme ſind nachmals in der griechiſchen Anthologie, in Bruncks Analectis Vett. Poetarum II. 477. sqq. und in Heilbronners Hist. Matheseos universae S. 845. wieder abgedruckt. Man wird es mir zu gute halten, daß ich die Nachbildung, welche ich von einigen dieſer Räthſel verſucht habe, hier mittheile. Die Auflöſung zu geben, hielt ich für überflüſſig, da ſie überall keine Schwierigkeit hat, wenn man bei den Aufgaben, in welchen eine gewiſſe Tageszeit beſtimmt werden ſoll, z. B. bei III. XX. XXIII. nur daran denkt, daß die Zeit vom Aufgang bis zum Untergang der Sonne immer in zwölf gleiche Theile getheilt wird.

Anmerkungen zum ſechsten Buche.

I.

Wenn man annimmt, das Dreieck werde von den Zahlen x und a gebildet, ſo iſt die Hypotenuſe $=x^2+a^2$, die eine Kathete $=x^2-a^2$, folglich der Unterſchied beider $=2a^2$. Soll alſo die erſte Bedingung der Aufgabe durch den bloßen Anſatz erfüllt werden, ſo muß man a ſo wählen, daß $2a^2$ ein Cubus wird. Dies erreicht man freilich am einfachſten, wenn man $a=2$ ſetzt, es kann aber auch auf unzählige Arten erreicht werden. Denn man ſtelle ſich die Aufgabe, eine Zahl x zu finden, deren doppeltes, oder allgemeiner, deren m faches Quadrat eine Kubikzahl ſei, und ſetze $mx^2=n^3x^3$, ſo wird $x=\frac{m}{n^3}$, wo man für n jede beliebige Zahl ſetzen kann.

Nachdem man nun $a=2$ geſetzt, folglich eine Bedingung der Aufgabe durch den bloßen Anſatz erreicht hat, ſo kommt es noch darauf an, daß auch die Differenz der Hypotenuſe und der zweiten Kathete, d. i. x^2-4x+4 eine Kubikzahl werde. Dieſe Differenz iſt aber alle Mal

ein Quadrat, in unſerem Falle von der Wurzel $x-2$. Setzt man nun $x-2=n^3$, ſo wird $x^2-4x+4=n^6$, alſo ebenfalls eine Kubikzahl. Hier kann man n^3 ganz beliebig wählen, da das Quadrat eines Cubus nothwendig wieder ein Cubus wird.

Diophantus findet für die Seiten des geſuchten Dreiecks die Zahlen 40, 96, 104; man kann aber noch die Seiten durch eine beliebige Kubikzahl multipliciren oder dividiren, denn wenn 104—40 eine Kubikzahl iſt, ſo iſt einleuchtend, daß ſowohl $(104-40)n^3$, als $\frac{104-40}{n^3}$ ebenfalls eine Kubikzahl ſein muß. Wenn man daher in unſerem Falle alle Seiten durch 8 dividirt, ſo wird das Dreieck 5, 12, 13 noch immer den Bedingungen der Aufgabe genügen.

II.

Das geſuchte Dreieck werde wieder von den Zahlen x und a gebildet, jedoch ſo, daß a von beiden die größere iſt, ſo wird die Hypotenuſe $=a^2+x^2$, die eine Kathete $=a^2-x^2$, folglich die Summe beider $=2a^2$. Man muß daher a wieder ſo wählen, daß $2a^2$ ein Cubus wird, und man kann daher $a=2$ ſetzen, wie in der vorigen Aufgabe.

Nun ſoll aber auch die Summe der Hypotenuſe und der zweiten Kathete, d. i. x^2+4+4x^2 eine Kubikzahl ſein. Da dieſe Formel das Quadrat von $x+2$ iſt, ſo erreicht man auch die zweite Bedingung, wenn man

$x+2=n^3$ ſetzt. Man darf hier aber n^3 nicht willkührlich, ſondern nur innerhalb gewiſſer Grenzen wählen. Aus der Gleichung folgt nämlich $x=n^3-2$, folglich muß n^3 größer als 2 ſein. Da aber die eine Kathete $=4-x^2$, ſo muß x^2 kleiner als 4, folglich x kleiner als 2 ſein, und dies wird nur dann zutreffen, wenn n^3 kleiner als 4 iſt.

Um aber für n^3 eine Kubikzahl zu finden, welche größer als 2 aber kleiner als 4 iſt, verwandle man beide Zahlen in ein Paar Brüche, deren Nenner eine beliebige Kubikzahl iſt, z. B. in $\frac{16}{8}$ und $\frac{32}{8}$. Nun nehme man eine zwiſchen beiden Zählern liegende Kubikzahl z. B. 27 als Zähler an, ſo wird $\frac{27}{8}$ nicht nur eine Kubikzahl ſein, ſondern auch innerhalb der vorgeſchriebenen Grenzen liegen.

Bachet wirft hier die Frage auf, warum Diophantus nicht ein rechtwinkliges Dreieck von der Beſchaffenheit ſuche, daß die Summe oder die Differenz der Hypotenuſe und jedweder Kathete ein Quadrat werde. Es iſt aber leicht einzuſehen, daß dieſe Aufgabe unmöglich iſt. Denn bildet man ein Dreieck von zwei Zahlen a und b, ſo iſt die Hypotenuſe $=a^2+b^2$, die eine Kathete $=2ab$, die zweite Kathete $=a^2-b^2$, folglich iſt ſowohl die Summe als die Differenz der Hypotenuſe und der erſten Kathete ſchon an ſich ein Quadrat, die Summe der Hypotenuſe und der zweiten Kathete aber wird

$=2a^2$

$=2a^2$, und die Differenz eben dieſer Größen $=2b^2$; beide Ausdrücke aber können niemals Quadrate werden, weil der Coefficient 2 kein Quadrat iſt.

III. IV.

Ein Dreieck heißt ſeiner Geſtalt nach gegeben, εἴδει δεδομένον, ſobald man ein demſelben ähnliches Dreieck zeichnen kann, unter andern alſo auch, wenn das Verhältniß der Seiten gegeben iſt. Um den Gang der Aufloͤſung bemerklich zu machen, nimmt Diophantus an, das geſuchte Dreieck ſei irgend einem beſtimmten rechtwinkligen Dreieck, hier z. B. dem Dreieck 3, 4, 5 ähnlich, und habe die Seiten $3x$, $4x$, $5x$. Nun iſt die Fläche dieſes Dreiecks $=6x^2$, und die Aufgabe verlangt alſo, daß man $6x^2+5$ zu einem Quadrat mache. Man ſetze daher $6x^2+5=n^2x^2$, wo n^2 zwar willkührlich, aber größer als 6 genommen werden muß, um negative Werthe zu vermeiden. Aus der obigen Gleichung folgt nun $x^2=\frac{5}{n^2-6}$; ſoll alſo x einen rationalen Werth erhalten ſo muß $\frac{5}{n^2-6}$ ein Quadrat ſein, welches der Fall ſein wird, wenn n^2-6 der fünfte Theil eines Quadrates iſt. Nun iſt die Zahl 6 die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks 3, 4, 5; man muß alſo dies Dreieck und das Quadrat, welches wir hier durch n^2 bezeichnet haben, ſo beſtimmen, daß, wenn f die Fläche des Dreiecks bezeichnet, n^2-f der fünfte Theil eines Quadrates wird.

Um dies Verfahren allgemein darzuſtellen, ſei die gegebene Zahl $=a$. Bildet man nun das Dreieck von den Zahlen x und $\frac{1}{x}$, und ſetzt die Wurzel des geſuchten Quadrates $=x+\frac{2a}{x}$, ſo wird das Verlangte erreicht werden. Das Quadrat ſelbſt wird nämlich $=x^2+4a+\frac{4a^2}{x^2}$; zieht man davon die Fläche des Dreiecks $=x^2-\frac{1}{x^2}$ ab, ſo bleibt $4a+\frac{4a^2+1}{x^2}$. Dieſer Reſt ſoll nun $\frac{1}{a}$ eines Quadrates ſein, daher muß $4a^2+\frac{(4a^2+1)a}{x^2}$, folglich auch $4a^2x^2+(4a^2+1)a$ ein Quadrat ſein. Da aber $4a^2x^2$ ſchon ein Quadrat iſt, ſo iſt es ganz leicht, die ganze Formel zu einem Quadrat zu machen, wenn man die Wurzel $=2ax+a$ ſetzt.

Nachdem Diophantus nun das zum Grunde gelegte Dreieck, und zugleich n^2 ſo beſtimmt hat, daß n^2-f der fünfte Theil eines Quadrates wird, darf nur das zu Anfang der Auflöſung erläuterte Verfahren wiederholt werden, um das in der urſprünglichen Aufgabe geſuchte Dreieck zu finden. Dieſe Rechnung führt Diophantus ſelten aus, und wir wollen ſie ebenfalls dem eigenen Fleiße des Leſers überlaſſen, und dafür lieber auf die Umſicht aufmerkſam machen, mit welcher Diophantus ſowohl die Zahlen x und $\frac{1}{x}$, als die Wurzel $x+\frac{2a}{x}$ gewählt hat.

Da die Fläche eines von den Zahlen x und $\frac{1}{x}$ gebildeten Dreiecks $= x^2 - \frac{1}{x^2}$ wird, ſo mußte die Wurzel des Quadrates ebenfalls ein Glied x enthalten, damit bei der Subtraction ſich x^2 gegen x^2 hebe. Die Wurzel enthält ferner ein Glied $\frac{2a}{x}$, und dadurch wird bewirkt, daß das Quadrat dieſes Theiles mit $\frac{1}{x^2}$ gleiche Benennung erhält, und, was vorzüglich wichtig iſt, daß in dem Quadrat ein Glied $= 4a$ vorkommt. Da dieſes in der Folge mit a, und zuletzt mit x^2 multiplicirt werden muß, ſo ſieht man, daß in der Formel, die man zu einem Quadrat machen ſoll, das Glied $4a^2x^2$ nicht zufällig ein Quadrat wird, ſondern daß alles für dieſen Zweck berechnet war. Uebrigens konnte der Zähler des zweiten Theiles der Wurzel ſtatt 2 jeden anderen Coefficienten erhalten, der das Doppelte eines Quadrates iſt, z. B. 8, 16, 32 u. ſ. w. **Vieta** hat bei dieſer Aufgabe bemerkt, daß die Zahl a nothwendig die Summe zweier Quadrate ſein müſſe, was bei der von Diophantus gewählten Zahl 5 wirklich der Fall iſt; aus dem in allgemeinen Zeichen dargeſtellten Verfahren aber ſieht man, daß a jede beliebige Beſchaffenheit haben kann.

Bei der vierten Aufgabe finden ganz dieſelben Betrachtungen Statt, welche wir bei der vorigen entwickelt haben.

V.

Die Aufgabe verlangt, daß $10-6x^2$ ein Quadrat werde. Zu dieſem Ende ſetze man $10-6x^2=n^2x^2$, ſo wird $x^2=\frac{10}{n^2+6}$. Soll alſo x einen rationalen Werth erhalten, ſo muß der obige Bruch ein Quadrat, alſo n^2+6 der zehnte Theil eines Quadrats ſein. Die Zahl 6 iſt aber die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks 3, 4, 5, und man muß daher ſtatt dieſes Dreiecks ein anderes ſuchen, und n^2 ſo beſtimmen, daß, wenn f die Fläche des Dreiecks bezeichnet, n^2+f der zehnte Theil eines Quadrats ſei. Dies erreicht man aber, wenn man das Dreieck von den Zahlen x und $\frac{1}{x}$ bildet, und die Wurzel des geſuchten Quadrats $=\frac{1}{x}+5x$, oder, wenn die gegebene Zahl durch a bezeichnet wird, $=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}ax$ ſetzt.

Das geſuchte Quadrat wird jetzt nämlich

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}a^2x^2+a,$$

die Fläche des Dreiecks $=x^2-\frac{1}{x^2}$, folglich die Summe beider $=x^2+\frac{1}{4}a^2x^2+a=\left(\frac{1}{4}a^2+1\right)x^2+a$. Dies ſoll nun $\frac{1}{a}$ eines Quadrats, folglich $\left(\frac{1}{4}a^3+a\right)x^2+a^2$ ein Quadrat ſein. Da das letzte Glied dieſer Formel ein Quadrat iſt, ſo wird die ganze Formel ein Quadrat,

wenn man $a+bx$ als Wurzel annimmt, wobei nur das zu beobachten iſt, daß b^2 kleiner ſein muß, als $\frac{1}{4}a^3+a$.

Uebrigens ſieht man, wie das ganze Verfahren dahin abzweckt, in der Formel, die man zu einem Quadrat machen ſoll, ein Glied $=a^2$ zu erhalten, wovon die Möglichkeit der Auflöſung abhangt.

VI. VII.

Um die vermiſchte quadratiſche Gleichung: $6x^2+3x=7$, oder, wenn man die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks $=f$, die Kathete $=k$, die gegebene Zahl $=a$ ſetzt, die Gleichung $fx^2+kx=a$ zu löſen, muß nach der in der Einleitung entwickelten Formel $\frac{1}{4}k^2+af$ ein Quadrat ſein, wenn x einen rationalen Werth erhalten ſoll, und dieſem gemäß muß man ſtatt des Dreiecks 3, 4, 5 ein anderes zum Grunde legen.

Setzt man die eine Kathete $=x$, die zweite $=1$, ſo wird $f=\frac{1}{2}x$ und $k=1$, es ſoll alſo $\frac{1}{4}+\frac{7}{2}x$, folglich auch das Vierfache dieſes Ausdrucks, d. i. $14x+1$ ein Quadrat ſein. Ferner müſſen die Quadrate beider Katheten zuſammengenommen ein Quadrat geben, wenn die Hypotenuſe durch eine rationale Zahl ausgedrückt werden ſoll.

Da man hier alſo einen Werth von x ſucht, für welchen ſowohl x^2+1 als $14x+1$ ein Quadrat wird, ſo läßt ſich die doppelte Gleichung anwenden, und man

findet $x = \frac{24}{7}$. Das Dreieck hat alſo die Katheten $\frac{24}{7}$ und 1, oder wenn man beide mit 7 multiplicirt, 24 und 7, folglich wird die Hypotenuſe = 25. Daß man die Katheten des geſuchten Dreiecks durch jede beliebige Zahl multipliciren könne, iſt leicht einzuſehen. Denn wenn jede Kathete noch den Factor b erhält, ſo verwandelt ſich $\frac{1}{4}k^2$ in $\frac{1}{4}b^2k^2$, die Fläche des Dreiecks aber wird $= b^2f$, alſo die Summe beider Größen

$$= \frac{1}{4}b^2k^2 + b^2f = b^2\left(\frac{1}{4}k^2 + f\right),$$

welches ohne Zweifel ein Quadrat ſein wird, ſobald $\frac{1}{4}k^2 + f$ ein Quadrat iſt.

Statt des Dreiecks 3, 4, 5 muß nun das Dreieck 7, 24, 25 zum Grunde gelegt, alſo die Seiten des in der Hauptaufgabe geſuchten Dreiecks durch 7x, 24x, 25x ausgedrückt werden. Nunmehr iſt die Fläche des Dreiecks $= 84x^2$, und es ſoll alſo $84x^2 + 7x = 7$ ſein. Nun wird $\frac{1}{4}k^2 + af = \frac{49}{4} + 588 = \frac{2401}{4}$, folglich $\sqrt{\left(\frac{1}{4}k^2 + af\right)} = \frac{49}{2}$. Zieht man davon $\frac{7}{2}$ ab, und dividirt den Reſt durch 84, ſo erhält man $= \frac{42}{168} = \frac{1}{4}$.

Auch bei der ſiebenten Aufgabe iſt die nämliche Hülfsaufgabe zu löſen.

VIII. IX.

Wenn man bei der Auflöſung dieſer Aufgabe ein Dreieck zum Grunde legt, in welchem die Summe der Katheten $=s$, die Fläche aber $=f$ wird, ſo erhält man die Gleichung $fx^2 \pm sx = 6$. Dieſe Gleichung kann aber nur dann in rationalen Zahlen aufgelöſ't werden, wenn $\frac{1}{4}s^2+6f$ ein Quadrat iſt.

Um dieſen Zweck zu erreichen, ſetzt Diophantus die eine Kathete $=x$, die zweite $=1$, alſo $s=x+1$, und $f=\frac{1}{2}x$. Es ſoll alſo $\frac{1}{4}(x+1)^2+3x=\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{2}x+\frac{1}{4}$, alſo auch $x^2+14x+1$ ein Quadrat ſein. Da die Quadrate der beiden Katheten die Summe x^2+1 geben, ſo muß auch dieſer Ausdruck ein Quadrat ſein, und man findet vermittelſt der doppelten Gleichung $x=\frac{45}{28}$, und daraus das Dreieck, von welchem man ausgehen muß. Die Seiten dieſes Dreiecks können aus dem bei VI. angeführten Grunde mit jeder beliebigen Zahl multiplicirt werden. Man erhält alſo das Dreieck 28, 45, 53, und ſetzt nunmehr die Seiten des geſuchten Dreiecks $=28x$, $45x$, $53x$. Aus der Gleichung findet man zuletzt $x=\frac{1}{18}$.

X. XI.

Geht man von einem Dreieck aus, in welchem die Hypotenuſe $=h$, die eine Kathete $=k$, die Fläche $=f$

iſt, ſo erhält man zuletzt die Gleichung $fx^2 \pm (h+k)x = 4$, wo das Zeichen + für die X. das Zeichen — für die XI. Aufgabe gilt. Daher muß $\frac{(h+k)^2}{4} \pm 4f$ ein Quadrat ſein, und das Dreieck muß dieſem gemäß beſtimmt werden.

Das Verfahren iſt im Texte ſelbſt ausführlich dargeſtellt. Das Dreieck ſollte von den Brüchen $\frac{5}{4}$ und $\frac{9}{4}$ gebildet werden, Diophantus aber bildet es von den Zahlen 5 und 9; denn dies iſt, wie man leicht überſieht, eben ſoviel, als hätte er die Seiten mit 16, oder mit dem Quadrat des Nenners multiplicirt, was nach der Anmerkung zu VI. alle Mal erlaubt iſt. Das von den Zahlen 5 und 9 gebildete Dreieck hat nun die Seiten 56, 90, 106, ſtatt deſſen legt Diophantus das dieſem ähnliche Dreieck 28, 45, 53 zum Grunde.

XII.

Wenn man das Dreieck von den Zahlen m und n bildet, ſo iſt die eine Kathete $=2mn$, die andere $=m^2-n^2$, die Fläche des Dreiecks aber $=mn(m^2-n^2)$. Sieht man nun 2mn als die größere Kathete an, ſo ſollen

1. $2mn-m^2+n^2$; 2. $2mn$;

3. $mn(m^2-n^2)+m^2-n^2$

Quadrate werden. Iſt nun $m=2n$, ſo wird $2mn=4n^2$, und $2mn-m^2+n^2=5n^2-m^2=n^2$,

alſo die beiden erſten Bedingungen durch den bloßen Anſatz erreicht.

Bildet man alſo das Dreieck von den Zahlen x und $2x$, ſo wird die größere Kathete $=4x^2$, die kleinere $=3x^2$, alſo die Fläche des Dreiecks $=6x^4$. Nun verlangt die Aufgabe, daß $6x^4+3x^2$, alſo auch $6x^2+3$ ein Quadrat ſei, und man überſieht ſogleich, daß dies geſchehen wird, wenn man $x^2=1$ ſetzt. Der folgende Lehnſatz zeigt aber, daß man für x unzählig viele Werthe finden kann, weil $6+3$, d. i. die Fläche und die kleinere Kathete eines von den Zahlen 1 und 2 gebildeten Dreiecks, nach dem Verfahren ſelbſt ein Quadrat zur Summe giebt.

XIII.

In der vorigen Aufgabe kam es bloß darauf an, die Formel $6x^2+3$ zu einem Quadrat zu machen, und wir fanden ohne eine eigentliche Rechnung, daß dies geſchehe, wenn man $x^2=1$ ſetzt, weil $6+3$ ſelbſt ein Quadrat war. Diophantus zeigt jetzt aber noch, daß man unter der obigen Vorausſetzung für x^2 unzählige Werthe finden kann. Sein Verfahren zeigt eigentlich, wie man die Formel $3x^2+6$ zu einem Quadrat machen könne; in der vorigen Aufgabe war es aber die Formel $6x^2+3$, welche zu einem Quadrat gemacht werden ſollte. Wir wollen daher das Verfahren an der letzteren Formel wiederholen.

Man ſetze das für x^2 geſuchte Quadrat

$$= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1;$$

wenn man dieſes Quadrat mit der Zahl 6 multiplicirt, und die andere gegebene Zahl dazu addirt, ſo erhält man $6x^2+12x+9$. In dieſer Formel iſt das letzte Glied nach der Vorausſetzung ein Quadrat, und man kann dieſelbe daher auf unzählige Arten zu einem Quadrate machen. Man ſetze z. B. die Wurzel $=3-3x$, ſo wird

$$6x^2 + 12x + 9 = 9 - 18x + 9x^2$$

Hieraus ergiebt ſich $x=10$, und da die Wurzel des geſuchten Quadrates $=x+1$ war, ſo wird dieſelbe $=11$, und das Quadrat ſelbſt $=121$. Setzt man dieſen Werth in die Formel $6x^2+3$, ſo erhält man $6.121+3=729=27^2$. Man kann daher das in XII. geſuchte Dreieck auch von den Zahlen 11 und 22 bilden, wo die Seiten deſſelben 363, 484, 605 ſein werden.

Uebrigens läßt ſich der hier erläuterte Satz nicht bloß auf ein Paar Zahlen anwenden, deren Summe ein Quadrat iſt, ſondern auch, wie Bachet ſehr richtig bemerkt hat, auf zwei Zahlen, welche ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man die eine durch ein Quadrat multiplicirt oder dividirt, und die zweite gegebene Zahl dazu addirt, die Summe ein Quadrat wird. Man habe z. B. die Zahlen a^2b und c, und nehme an, daß $b+c$ ein Quadrat ſei, ſo kann man unzählige Quadrate von der Beſchaffenheit finden, daß, wenn man das erſte Glied durch eines dieſer Quadrate dividirt oder multiplicirt, und

das zweite Glied dazu addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird. Es ſei z. B. die Wurzel des geſuchten Quadrats $=a+x$, das Quadrat ſelbſt alſo $=a^2+2ax+x^2$, ſo ſoll

$$\frac{a^2b}{a^2+2ax+x^2}+c=\frac{cx^2+2acx+a^2c+a^2b}{a^2+2ax+x^2}$$

ebenfalls ein Quadrat ſein.

Da der Nenner ſchon ein Quadrat iſt, ſo kommt es nur darauf an, den Zähler zu einem Quadrat zu machen. Nun iſt aber $a^2c+a^2b=a^2(c+b)$, und da nach der Annahme $c+b$ ein Quadrat iſt, ſo muß auch das ganze Glied $a^2(c+b)$ ein Quadrat ſein, und man kann daher den Zähler des obigen Bruchs, folglich die ganze Formel zu einem Quadrate machen.

Von dieſem Satze muß zur Auflöſung der XII. Aufgabe vielfältig Anwendung gemacht werden. Man bilde z. B. das in XII. zum Grunde liegende Dreieck von den Zahlen $2x$ und $4x$, ſo iſt die größere Kathete $=16x^2$, die kleinere Kathete $=12x^2$, alſo der Unterſchied beider $=4x^2$, und zwei Bedingungen der Aufgabe ſind alſo ſchon erfüllt. Nun ſoll aber auch die Fläche des Dreiecks, mit der kleinern Kathete zuſammengenommen, ein Quadrat werden d. h. $96x^4+12x^2$, folglich auch $96x^2+12$ ſoll ein Quadrat ſein. Hier iſt nun die Summe $96+12$ kein Quadrat, wenn man aber 96 durch das Quadrat 4 dividirt, ſo wird $24+12=36$, und es läßt ſich nunmehr wohl der Bachetſche, aber nicht der Diophantiſche Lehuſatz anwenden, um die Formel $96x^2+12$ zu einem Quadrat zu machen.

Aus der Entſtehung der Fläche und der kleineren Kathete eines Dreiecks, wie in XII. geſucht wird, iſt übrigens klar, daß die Zahlen, die man für 6 und 3 erhält, entweder unmittelbar, oder wenigſtens dann ein Quadrat zur Summe geben, wenn man den Coefficienten der Fläche durch das Quadrat der kleineren Zahl, von denen man das Dreieck gebildet hat, dividirt. Das Dreieck ſei z. B. von den Zahlen ax und $2ax$ gebildet, ſo iſt die größere Kathete $=4a^2x^2$, die kleinere $=3a^2x^2$, alſo die Fläche $=6a^4x^4$, und man ſoll alſo die Formel $6a^4x^4+3a^2x^2$, oder auch nur $6a^4x^2+3a^2$ zu einem Quadrat machen. Dividirt man nun das erſte Glied durch a^2, ſo iſt $6a^2+3a^2=9a^2$, folglich alle Mal ein Quadrat.

XIV.

Um den Gang der Auflöſung bemerklich zu machen, nehme man mx, nx, px als die Seiten des geſuchten Dreiecks an. Nun ſoll ſowohl $\frac{mnx^2}{2}+mx$, als $\frac{mnx^2}{2}+nx$ ein Quadrat ſein. Man ſetze alſo $\frac{mnx^2}{2}+nx=z^2x^2$, wo z^2 willkührlich, aber größer als $\frac{mn}{2}$ genommen werden muß. Hieraus ergiebt ſich $x=\frac{n}{z^2-\frac{1}{2}mn}$, und wenn nun für eben dieſen Werth von x auch $\frac{mnx^2}{2}+mx$ ein Qua-

drat würde, ſo wäre die Auflöſung gefunden. Dies trifft aber nicht zu, wenn, wie im Texte,

$$z^2=36,\ \frac{mn}{2}=30,\ \text{und}\ n=12$$

iſt. Daher muß man für z^2 ein anderes Quadrat von der Beſchaffenheit ſuchen, daß, wenn man $\frac{1}{2}mn=30$ davon abzieht, die Kathete $n=12$ dadurch dividirt, hierauf den Quotienten $\frac{n}{z^2-\frac{1}{2}mn}$ ins Quadrat erhebt, dieſes wieder mit $\frac{1}{2}mn=30$ multiplicirt, und endlich mx, d. i. $\frac{5n}{z^2-\frac{1}{2}mn}$ dazu addirt, die Summe ebenfalls ein Quadrat wird.

Vollzieht man die angegebene Rechnung, ſo ſoll $\frac{60z^2+2520}{z^4-60z+900}$ ein Quadrat ſein, welches der Fall ſein wird, ſobald nur $60z^2+2520$ ein Quadrat iſt. Es wäre nun nach dem vorigen Lehnſatz ganz leicht, die Formel $60z^2+2520$ zu einem Quadrat zu machen, wenn $60+2520$ ein Quadrat wäre, und man muß daher die Seiten des zum Grunde gelegten Dreiecks, m, n, p ſo beſtimmen, daß dieſer Forderung genügt wird.

Man überlege zu dieſem Ende, wie die Zahlen 60 und 2520 entſtanden ſind, indem man die im Texte ausgeführte Zahlenrechnung, Schritt vor Schritt, verfolgt. Die Zahl 60 iſt $=mn$, alſo ein Produkt der beiden Katheten, 2520 aber entſteht, indem man 144, oder das

Quadrat der größern Kathete mit der Zahl 30, oder mit der Fläche des Dreiecks $=\frac{1}{2}mn$ multiplicirt, und davon das Produkt $60\times30=5.12.30$ d. h. ein Produkt aus den beiden Katheten und der Fläche des Dreiecks abzieht. Iſt alſo n die größere Kathete, ſo iſt die wahre Entſtehung der Zahl 2520 in folgender Formel enthalten, $2520=n^2\frac{mn}{2}-mn.\frac{mn}{2}=n(n-m)\frac{mn}{2}$. Diophantus ſagt daher ganz recht, die Zahl 2520 ſei ein Produkt aus der größeren Kathete n, dem Unterſchied beider Katheten $n-m$, und der Fläche des Dreiecks $\frac{mn}{2}$.

Es muß daher ein Dreieck geſucht werden, deſſen Katheten m und n ſo beſchaffen ſind, daß $mn+n(n-m)\frac{nm}{2}$ ein Quadrat wird. Iſt nun die größere Kathete n ſelbſt ein Quadrat, und man dividirt obige Formel durch n, ſo muß $m+(n-m)\frac{nm}{2}$ d. i. die kleinere Kathete und das Produkt aus der Fläche in den Unterſchied der Katheten ein Quadrat ſein. Nach XII. ſind wir im Stande, ein Dreieck zu finden, in welchem die größere Kathete n, ferner der Unterſchied beider Katheten $m-n$, endlich die Summe der Fläche und der kleinern Kathete $m+\frac{mn}{2}$ ein Quadrat iſt. Von den unzähligen Dreiecken, welche auf dieſe Weiſe gefunden werden können, nimmt Diophantus das Dreieck 3, 4, 5, weil in dieſem $n-m=1$,

folglich $m+(n-m)\frac{mn}{2}=m+\frac{mn}{2}$, alſo nach dem Verfahren ſelbſt ein Quadrat iſt. Um den Gang des Verfahrens anzudeuten, ſetzt Diophantus hinzu, daß es nach Auflöſung dieſer vorläufigen Aufgabe bloß darauf ankomme, zu den Zahlen m und $\frac{mn}{2}$, d. i. zu der kleinern Kathete und der Fläche des Dreiecks ein Quadrat (z^2) von der Beſchaffenheit zu ſuchen, daß $mz^2+\frac{mn}{2}$ ein Quadrat wird.

Nunmehr ſetzt Diophantus die Seiten des Dreiecks $3x$, $4x$, $5x$, und wiederholt ganz das vorige Verfahren. Es ſoll nämlich ſowohl $6x^2+4x$ als $6x^2+3x$ ein Quadrat werden.

Nun ſollte man $6x^2+4x=z^2x^2$ ſetzen, woraus ſich $x=\frac{4}{z^2-6}$ ergiebt. Es muß aber z^2, (wofür Diophantus x^2 ſetzt), ſo beſtimmt werden, daß das Quadrat von $\frac{4}{z^2-6}$ wenn man es mit 6 multiplicirt, und die dreifache Wurzel dazu addirt, wieder ein Quadrat wird. Iſt nun $x=\frac{4}{z^2-6}$, ſo iſt das Quadrat $=\frac{16}{z^4-12z+36}$; wenn man dies mit 6, multiplicirt, und die dreifache Wurzel dazu addirt, ſo erhält man $\frac{16.16}{z^4-12z+36}+\frac{3.4}{z^2-6}$, und wenn man beide Glieder auf einerlei Benennnung bringt, ſo erhält man nach gehöriger Reduction $\frac{12z^2+24}{z^4-12z+36}$. Dieſe Formel ſoll ein Quadrat ſein, und da der Nenner bereits ein Quadrat iſt, ſo hat man nur den Zähler

$12z^2+24$ zu einem Quadrat zu machen. Da wir das Dreieck 3, 4, 5 ſo beſtimmt haben, daß

$$12+24 = mn+n(n-m)\frac{mn}{2}$$

ein Quadrat iſt, ſo iſt nur noch übrig, daß man z^2, nach dem in dem Lehnſatz XIII. gezeigten Verfahren beſtimme.

Man ſetze die Wurzel des geſuchten Quadrates $=y+1$, alſo das Quadrat ſelbſt $=y^2+2y+1$. Multiplicirt man dies mit 12, und addirt dazu 24, ſo erhält man $12y^2+24y+36$. Davon ſetze man die Wurzel $=6+3y$, ſo wird $y=4$, alſo die Wurzel des geſuchten Quadrates $y+1=5$, und das verlangte Quadrat iſt alſo 25. Nunmehr ſetze man

$$6x^2+4x=25x^2$$

ſo wird $x=\frac{4}{19}$.

Da die Wurzel von $12y^2+24y+36$ verſchieden genommen werden kann, ſo erhält man auch dann noch verſchiedene Auflöſungen, wenn man immer das Dreieck 3, 4, 5 zum Grunde legt, welches deshalb beſonders brauchbar iſt, weil in demſelben $n-m=1$ wird. Die übrigen Dreiecke, welche nach XII. gefunden werden könnten, ſind für unſern Zweck nicht ohne eine beſondere Rechnung zu gebrauchen. Fermat zeigt jedoch, wie man aus dem Dreieck 3, 4, 5 unzählig viele andere Dreiecke ableiten könne, welcher auch unmittelbar zur Auflöſung ge-

gebraucht werden können. Man ſetze nämlich die größere Kathete $=4$, die kleinere $=3+x$, ſo wird

$$mn+x(n-m)\frac{mn}{2}=36-12x-8x^2,$$

und dieſe Formel muß alſo ein Quadrat ſein. Soll aber die Hypotenuſe einen rationalen Werth erhalten, ſo muß auch die Summe der Kathetenquadrate d. i. $x^2+6x+25$ ein Quadrat ſein. Die Auflöſung dieſer doppelten Gleichung hat aber keine Schwierigkeit, weil in beiden die beſtimmte Zahl ein Quadrat iſt.

XV.

Wenn man bei dieſer Aufgabe ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck zum Grunde legt, ſo finden eben die Betrachtuugen Statt, welche wir bei der vorigen Aufgabe entwickelt haben. Daher legt Diophantus ſogleich das Dreieck 3, 4, 5 zum Grunde, und ſetzt die Seiten des geſuchten Dreiecks $3x$, $4x$, $5x$.

Dieſer Anſatz führt darauf, daß ſowohl $6x^2-4x$ als $6x^2-3x$ ein Quadrat ſein ſoll. Man ſetze alſo $6x^2-4x=z^2x^2$, wo z^2 kleiner als 6 ſein muß, ſo wird $x=\frac{4}{6-z^2}$. Nun muß $x^2=\frac{16}{z^4-12z^2+36}$ auch die Eigenſchaft haben, daß, wenn man es mit 6 multiplicirt, und die dreifache Wurzel davon abzieht, der Reſt ein Quadrat wird. Wenn man aber die hier angegebene Rechnung vollzieht, ſo erhält man $\frac{12z^2+24}{z^4-12z^2+36}$.

Nun kommt es bloß darauf an, den Zähler $12z^2+24$ zu einem Quadrat zu machen; da aber nach dem Verfahren ſelbſt $12+24$ ein Quadrat iſt, ſo kann man $z^2=1$ ſetzen, dann werden die Seiten des Dreiecks $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$ und 4, die Fläche $\frac{96}{25}$; zieht man davon die Katheten einzeln ab, ſo erhält man die Reſte $\frac{36}{25}$ und $\frac{16}{25}$, alſo in beiden Fällen Quadrate.

Nach dem Lehnſatz XII. kann man ſtatt z^2 noch unzählige Werthe finden, nur muß man darauf Rückſicht nehmen, daß z^2 nicht größer als 6 ſein darf. Man ſetze alſo die Wurzel des Quadrats, welches in die Formel $12z^2+24$ ſtatt z^2 geſetzt werden ſoll, $=z+1$, alſo das Quadrat ſelbſt $=z^2+2z+1$, ſo ſoll

$$12z^2+24z+36,$$

oder, wenn man alles mit 4 dividirt, $3z^2+6z+9$ ein Quadrat ſein. Die Wurzel muß nun die Form $3-nz$ haben, dies giebt $z=\frac{6n+6}{n^2+3}$. Nun ſoll das geſuchte Quadrat kleiner als 6, folglich die Wurzel deſſelben kleiner als $\sqrt{6}$, d. i. wenn man die Wurzel bloß durch Näherung beſtimmt, kleiner als $\frac{22}{9}$ ſein, daher muß z kleiner als $\frac{22}{9}-1$, d. i. kleiner als $\frac{13}{9}$ ſein. Hiernach muß man alſo die Zahl n, welche ſonſt willkührlich iſt, näher beſtimmen, d. h. man muß eine Zahl n ſuchen, die ſo beſchaffen iſt, daß $\frac{6n+6}{n^2+3}$ kleiner als $\frac{13}{9}$ wird.

Wie man dieſe Prüfung anzuſtellen habe, iſt in der Anmerkung zur XXXIII. Aufgabe des fünften Buches ausführlich gezeigt worden.

XVI.

Wenn man das Dreieck 3, 4, 5 zum Grunde legt, alſo die Seiten des geſuchten Dreiecks durch $3x$, $4x$, $5x$ ausdrückt, ſo ſoll man die Formeln $6x^2-5x$ und $6x^2-3x$ zu Quadraten machen. Man ſetze daher $6x^2-3x=z^2x^2$, wo z^2 ein beliebiges Quadrat, aber größer als 6 iſt, ſo wird $x=\frac{3}{z^2-6}$, wofür Diophantus, wie immer, $\frac{3}{x^2-6}$ ſetzt. Nun ſollte für eben dieſen Werth von x auch die zweite Formel $6x^2-5x$ ein Quadrat ſein, und nach der im Texte ausgeführten Rechnung kommt es dahin, daß man die Formel $15z^2-36$ zu einem Quadrat machen muß. Da das letzte Glied ein Quadrat iſt, z^2 aber noch keinen beſtimmten Zahlenwerth hat, ſo wäre es ganz leicht, dieſe Formel zu einem Quadrat zu machen, wenn 15 die Summe zweier Quadrate wäre; denn ſollte man z. B. $(a^2+b^2)z^2-d^2$ zu einem Quadrat machen, ſo ſetze man $(a^2+b^2)z^2-d^2=a^2z^2$, ſo wird

$$b^2z^2=d^2, \text{ alſo } z=\frac{d}{b}.$$

Da 15 aber nicht die Summe von zwei Quadraten iſt, ſo wird es nöthig, die Entſtehung der ganzen Formel $15z^2-36$ näher zu betrachten, und um dieſelbe

deſto leichter darſtellen zu können, wollen wir die Hypotenuſe des zum Grunde gelegten Dreiecks $= h$, die kleinere Kathete $= k$, ſeine Fläche $= f$ ſetzen. Nun iſt, wie die im Text ausführte Rechnung nachweiſ't,

$$15 = 3.5 = hk, \; 36 = 90 - 54 = 3.5.6 - 3.3.6 = khf - k^2f$$
$$= kf(h-k)$$

d. h. 36 iſt ein Produkt aus der kleineren Kathete, aus der Fläche des Dreiecks, und aus dem Unterſchied der Hypotenuſe und der kleineren Kathete. Endlich iſt z^2 ein beliebiges Quadrat, welches aber kleiner ſein muß, als die Fläche des Dreiecks, weil $6 - z^2 = f - z^2$ als Diviſor vorkommt. Man muß alſo ſtatt des Dreiecks 3, 4, 5, ein anderes Dreieck ſuchen, und dazu z^2 ſo beſtimmen, daß mit Beibehaltung der vorigen Zeichen $hkz^2 - kf(h-k)$ ein Quadrat wird.

Hier folgt nun im Texte eine Betrachtung, welche die Auflöſung vorbereiten ſoll, es fehlt aber nicht nur der Anfang derſelben, der in der Ueberſetzung daher durch eine Lücke angedeutet worden iſt, ſondern die letzten Worte derſelben ſind auch ſo verderbt, daß man kaum den Sinn derſelben errathen kann, daher der Ueberſetzer die ganze Stelle, deren Sinn er nur muthmaßen konnte, mit Sternen bezeichnet hat. Glücklicherweiſe iſt indeß die eigentliche Auflöſung vollſtändig erhalten, und die nähere Entwickelung derſelben wird die muthmaßliche Ueberſetzung rechtfertigen.

Man bilde das Dreieck, von welchem man ausgehen will, von zwei ähnlichen Flächenzahlen z. B. von a und

ab^2, ſo wird die Hypotenuſe $h = a^2b^4 + a^2$; die größere Kathete $g = a^2b^4 - a^2$, die kleinere Kathete $k = 2a^2b^2$, alſo das Doppelte eines Quadrats, die Fläche des Dreiecks $f = \frac{1}{2}kg$, alſo ein Produkt aus einem Quadrat in die größere Kathete, endlich wird

$$h - k = a^2b^4 - 2a^2b^2 + a^2 = (ab^2 - a)^2,$$

d. h. dieſe Differenz wird, wie immer, ein Quadrat, und hieraus läßt ſich zeigen, daß die obige Formel $hkz^2 - kf(h-k)$ ein Quadrat wird, wenn man

$$z^2 = \frac{1}{2}k(h-k)$$

ſetzt; denn daß dies Produkt ein Quadrat ſein werde, iſt einleuchtend, da nach der eben gegebenen Erläuterung beide Factoren Quadrate ſind. Setzt man nämlich in die Formel die für f und z^2 angegebenen Werthe, ſo erhält man

$$hk.\frac{1}{2}k(h-k) - k.\frac{1}{2}kg(h-k).$$

Dividirt man dieſe Formel ein Mal durch das Quadrat $h-k$, und zwei Mal hinter einander durch das Quadrat $\frac{1}{2}k$, ſo hat man nur zu zeigen, daß der Quotient $2h - 2g = 2(h-g)$ ein Quadrat ſei. Man ſetze aber für h und g die obigen Werthe, ſo wird

$$2(h-g) = 2(a^2b^4 + a^2 - a^2b^4 + a^2) = 4a^2,$$

und es iſt alſo bewieſen, daß die Formel $hkz^2 - kf(h-k)$ durch das angegebene Verfahren nothwendig ein Quadrat wird.

Der leichteren Ueberſicht wegen wollen wir den Beweis noch an einem beſtimmten Zahlenbeiſpiele wiederholen. Man bilde das Dreieck von den Zahlen 1 und 4, ſo wird die Hypotenuſe $=16+1=17$, die größere Kathete $=16-1=15$, die kleinere Kathete $=2.4=8$, alſo das Doppelte eines Quadrats, die Fläche des Dreiecks $=4.15=60$, die Differenz der Hypotenuſe und der kleineren Kathe $=17-8=9$, alſo wie immer ein Quadrat.

Setzt man nun die Seiten des geſuchten Dreiecks der Reihe nach $8x$, $15x$, $17x$, ſo ſoll man die beiden Formeln $60x^2-17x$ und $60x^2-8x$ zu Quadraten machen. Um die letztere Formel zu einem Quadrate zu machen, ſetze man

$$60x^2-8x=z^2x^2, \text{ ſo wird } x=\frac{8}{60-z^2}.$$

Setzt man dieſen Werth für x in die erſte Formel, ſo ſoll auch

$$\frac{60.8.8-17.8.60+17.8.z^2}{3600-120z^2+z^4}=\frac{8.17.z^2-8.60(17-8)}{(60-z^2)^2}$$

ein Quadrat ſein. Da der Nenner bereits ein Quadrat iſt, ſo kommt es nur darauf an, den Zähler $8.17z^2-8.60.(17-8)$ zu einem Quadrat zu machen. Nun iſt zwar der Coefficient $8.17=136=100+36$ die Summe zweier Quadrate, und es iſt leicht einzuſehen, daß dies nicht Zufall, ſondern eine nothwendige Folge des ganzen Verfahrens iſt, indem $8=2.4$, und $17=16+1$ iſt; allein da das Glied $8.60.(17-8)$ nicht, wie in der

erſten Formel die Zahl 36, ein Quadrat iſt, ſo läßt ſich das dort angedeutete Verfahren gar nicht anwenden. Es iſt aber auch nicht nöthig, daſſelbe anzuwenden, da wir die Formel auf eine andere Art zu einem Quadrat machen können, indem wir nämlich $z^2 = \frac{1}{2}k(h-k)$ d. i. $=4.9=36$ ſetzen. Daß aber die Zahl

$$8.17.4.9-8.60.(17-8)$$

nothwendig ein Quadrat ſei, läßt ſich leicht einſehen. Beide Glieder enthalten den Factor $9=17-8$, der nach der Conſtruction ein Quadrat iſt. Da $60=4.15$, ſo enthalten beide Glieder den quadratiſchen Factor 4, und da der gemeinſchaftliche Factor $8=2.4$ iſt, ſo enthalten beide Glieder den quadratiſchen Factor 4 noch zum zweiten Male; dividirt man alſo durch das Quadrat $4.4.9$, ſo iſt nur noch zu zeigen, daß der Quotient

$$2.17-2.15=2(17-15)$$

ein Quadrat ſein müſſe. Nun iſt aber, wenn wir wieder auf die Entſtehung der Zahlen zurückgehen, $17=16+1$, und $15=16-1$, alſo wird $17-15$ nicht zufällig, ſondern nothwendiger Weiſe das Doppelte eines Quadrats, alſo $2(17-15)$ das Vierfache eines Quadrats, d. h. $2(17-15)$ muß ein Quadrat ſein.

Man kann daher, um die Formel $60x^2-8x$ zu einem Quadrat zu machen, z^2 ſogleich $=36$, d. h. $60x^2-8x=36x^2$ ſetzen, weil man ſchon weiß, daß für dieſen Fall auch $60x^2-17x$ ein Quadrat wird.

Jetzt iſt nur noch eine Schwierigkeit zu erörtern. Wenn man nämlich $60x^2-8x=z^2x^2$ ſetzt, ſo muß z^2 nothwendig kleiner als 60 ſein, weil man für x den Werth $\frac{8}{60-z^2}$ findet; es iſt daher noch zu zeigen, daß bei dem angegebenen Verfahren 36 nicht zufälliger, ſondern nothwendiger Weiſe kleiner als 60, d. i. kleiner als die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks wird. Nach der Entſtehung dieſer Zahlen war $36=4.9$, $60=4.15$; da beide Zahlen den Factor 4 gemein haben, ſo iſt bloß zu zeigen, daß $9=17-8$ nothwendig kleiner als $15=16-1$ ſei. Geht man auf die Entſtehung des Dreiecks 8, 15, 17 zurück, und nennt die größere Zahl, von welchen daſſelbe gebildet wurde a, die kleinere b, ſo iſt $17=a^2+b^2$, $15=a^2-b^2$, $8=2ab$, alſo $9=a^2+b^2-2ab$. Iſt nun a größer als b, ſo iſt ab gewiß größer als b^2, folglich 2ab größer als $2b^2$; und daher giebt die Formel a^2+b^2-2ab nothwendig einen kleineren Werth, als die Formel a^2-b^2.

Die Aufgabe iſt ihrer Natur nach eine unbeſtimmte, auf dem hier angegebenen Wege erhält man aber immer nur eine Auflöſung; will man daher für x andere Werthe haben, ſo kann man das Dreieck von ein Paar anderen Flächenzahlen bilden, oder nach Anleitung des folgenden Satzes ſtatt 36 ein anderes Quadrat ſuchen, welches für z^2 geſetzt, ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe genügt.

XVII.

In der XI. Aufgabe kam es darauf an, die Formel $3x^2+6$ zu einem Quadrat zu machen, und man ſah ſogleich, daß man nur $x^2=1$ ſetzen dürfe, um dieſen Zweck zu erreichen. In dem folgenden Lehnſatz XII. zeigt Diophantus aber, wie aus dem einen Werthe $x^2=1$ ſich unzählige Werthe ableiten laſſen, welche der nämlichen Forderung genügen.

So wie dort die XI. Aufgabe durch den folgenden Lehnſatz ergänzt wurde, ſo wird die XVI. Aufgabe durch den gegenwärtigen Lehnſatz ergänzt. Es kam im Vorigen darauf an, die Formel $17.8.z^2—3.60.9=136x^2—4320$ zu einem Quadrat zu machen, und es fand ſich, daß dies geſchehe, wenn man $x^2=36$ ſetzt. Nunmehr wird gezeigt, daß man ſtatt 36 noch unzählige Werthe finden könne, welche für x^2 geſetzt, die obige Formel zu einem Quadrat machen. In der Aufgabe iſt zwar noch die nähere Beſtimmung enthalten, daß das neue Quadrat größer ſein ſolle, als das gegebene, weil dies in der folgenden Aufgabe verlangt wird. Es hat aber gar keine Schwierigkeit, auch ein kleineres Quadrat von der verlangten Eigenſchaft zu finden. Wenn nämlich 3 und 11 die gegebenen Zahlen ſind, und 25 die Eigenſchaft hat, daß $3.25—11$ ein Quadrat wird, ſo ſetze man die Wurzel des geſuchten Quadrats $=5—x$, ſo wird das Quadrat $=x^2—10x+25$, und nun ſoll

$$3(x^2—10x+25)+11=3x^2—30x+3.25+11$$

ein Quadrat ſein. Da das letzte Glied nach der Vorausſetzung noch immer ein Quadrat, nämlich $=64$ iſt, ſo läßt ſich die ganze Formel zu einem Quadrat machen, wenn man die Wurzel $=8-2x$ ſetzt. Hieraus ergiebt ſich

$$4x^2-32x+64=3x^2-30x+64$$

alſo $x^2=2x$, und $x=2$. Da nun die Wurzel des geſuchten Quadrats $5-x$ war, ſo wird dieſelbe $=3$, und das geſuchte Quadrat $=9$, und wirklich iſt $3.9-11=16$, alſo wieder ein Quadrat. Giebt man der Wurzel die Form $8-nx$, ſo wird $x=\frac{16n-30}{n^2-3}$, und da x kleiner als 5 werden muß, ſo findet man, nach der oft erwähnten Methode, daß man für n alle ganzen Zahlen von der 2 an ſetzen könne.

XVIII.

Die Gründe des ganzen Verfahrens ſind in der Anmerkung zu XVI. bereits entwickelt. Setzt man das geſuchte Dreieck $=8x,\ 15x,\ 17x$, ſo ſollen $60x^2+17x$ und $60x^2+8x$ zwei Quadrate werden. Man ſetze alſo $60x^2+8x=z^2x^2$, ſo wird $x=\frac{8}{z^2-60}$, woraus ſich ſogleich ergiebt, daß z^2 größer als 60 d. i. größer als die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks 8, 15, 17 ſein muß. Setzt man nun dieſen Werth von x in die Formel $60x^2+17x$, ſo ſoll auch $\frac{60.8.8}{(z^2-60)^2}+\frac{17.8}{z^2-60}=\frac{136z^2-4320}{(z^2-60)^2}$ ein Quadrat werden, welches geſchehen wird, wenn nur der Zähler $136z^2-4320$ ein Quadrat wird.

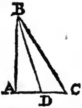
Wir wiſſen nun zwar, daß dies geſchieht, wenn man $z^2=36$ ſetzt; dies Quadrat iſt aber kleiner als die Fläche des Dreiecks, und man muß daher vermittelſt des vorigen Lehnſatzes ein größeres Quadrat ſuchen, welches dieſelbe Eigenſchaft hat, und größer als 60 iſt.

Man ſetze die Wurzel $=6+y$, alſo das Quadrat $=y^2+12y+36$. Multiplicirt man dies mit 136, und zieht von dem Produkt die Zahl 3420 ab, ſo erhält man $136y^2+1632y+576$. Da das letzte Glied das Quadrat von 24 iſt, ſo ſetze man die Wurzel $=24+16y$, woraus ſich $y=20$, alſo die geſuchte Wurzel $=26$, und das geſuchte Quadrat $=676$ ergiebt. Da das Quadrat größer als 60 ſein ſollte, ſo durfte die Wurzel nicht kleiner als 8, folglich y nicht kleiner als 2 ſein. Giebt man alſo der Wurzel die Form $24-ny$, ſo wird $y=\frac{1632-48n}{n^2-136}$, woraus man ſogleich ſieht, daß n^2 größer als 136, alſo n nicht kleiner als 12 ſein darf. Aus einer fernern Prüfung ergiebt ſich $n^2+24n<952$, woraus man findet, daß n in ganzen Zahlen höchſtens $=21$ ſein könne, daher man für n alle Zahlen von 12 bis 21 ſetzen kann.

XIX.

In dem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC werde der Winkel bei B durch die gerade $BD=5x$ gehälftet. Iſt nun der Abſchnitt $AD=3x$, ſo muß die Kathete $AB=\sqrt{(25x^2-9x^2)}=4x$ ſein. Iſt aber $AC=3$,

ſo wird $CD = AC - AD = 3 - 3x$ ſein. Da der Winkel bei B gehälftet iſt, ſo hat man nach Eukl. VI., 3. die Proportion $BC:CD = AB:AD$. Nun iſt nach der Annahme



$$AB:AD = 4x:3x = 4:3,$$

alſo iſt auch $BC:CD = 4:3$. Da $CD = 3 - 3x$, ſo wird

$$BC = \frac{(3-3x)4}{3} = 4 - 4x.$$

Bachet fügt dieſer Aufgabe eine ſehr lehrreiche Sammlung von Aufgaben bei, in welchen ſchiefwinklige Dreiecke in rationalen Zahlen alſo beſtimmt werden, daß die Linien, welche aus einer Winkelſpitze gezogen werden, und entweder dieſen Winkel oder die Gegenſeite deſſelben hälften, oder auch auf der Gegenſeite winkelrecht ſtehen, ſich ebenfalls durch rationale Zahlen ausdrücken laſſen. Dieſe Aufgaben ſind dem Liebhaber der diophantiſchen Analyſis mit Recht zu empfehlen; vermuthlich machten ähnliche Aufgaben den Inhalt einiger verlorenen Bücher des Diophantus aus.

XX.

Die Aufgabe, ein Quadrat zu finden, welches ein Cubus wird, ſobald man 2 dazu addirt, führt auf die kubiſche Gleichung

$$x^3 + x = 4x^2 + 4, \text{ oder } x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0.$$

Da das letzte Glied die Factoren 1, 2 und 4 hat, ſo findet man leicht, daß die ganze Formel $=0$ werde, wenn man $x=4$ ſetzt. Auf welche Weiſe Diophantus eine kubiſche Gleichung löſe, iſt aus den vorhandenen Büchern nicht zu erſehen; vermuthlich kannte er nur die Auflöſung für einige beſtimmte Fälle, zu denen auch der gegenwärtige gehört. Hat nämlich eine kubiſche Gleichung die Form

$$x^3 + x = ax^2 + a, \text{ oder } x^3 + x^2 = ax + a,$$

ſo iſt leicht einzuſehen, daß in dem erſten Falle $x = a$, im zweiten $x = \sqrt{a}$ ſein müſſe, und daß man alſo in beiden Fällen eine der drei Wurzeln ohne eigentliche Rechnung finden könne.

XXI.

Setzt man die Hypotenuſe $=8-x$, die Fläche $=x$, ſo iſt die erſte Bedingung bereits erfüllt. Iſt ferner, wie in der vorigen Aufgabe, die eine Kathete $=2$, die andere $=x$, ſo iſt der Umfang des Dreiecks $=8+2$, und da dieſe Summe kein Quadrat iſt, ſo muß man, ſtatt der beliebig gewählten Kubikzahl 8, eine andere von der Beſchaffenheit ſuchen, daß ſie ein Quadrat wird, wenn man 2 dazu addirt.

Durch eine beſondere Rechnung findet Diophantus, daß $\frac{4913}{64}$ eine Kubikzahl von der verlangten Eigenſchaft ſei, und ändert nun den vorigen Anſatz bloß dahin ab,

daß die Hypotenuſe nicht $=8-x$, ſondern $=\frac{4913}{64}-x$ geſetzt wird, wofür in der Ueberſetzung durch ein Verſehen $\frac{4913}{64}x$ ſteht.

XXII.

Der urſprüngliche Anſatz führt darauf, daß man die Zahl $4x^3+6x+2$, welche den Umfang ausdrückt, zu einem Cubus machen ſolle. Dividirt man dieſe Formel durch $x+1$, und verwandelt dadurch den Umfang in $4x+2$, ſo iſt das eben ſo viel, als hätte man jede Seite durch $x+1$ dividirt, und man ſetzt alſo ſtatt des zuerſt gewählten Dreiecks ein anderes, welches dem vorigen ähnlich iſt, da das Verhältniß der Seiten daſſelbe bleibt. Dadurch verwandelt ſich aber die Summe der Fläche und der einen Kathete in $2x+1$, und die Zahl $4x+2$, welche ein Cubus werden ſoll, wird gerade das Doppelte der Zahl $2x+1$, welche ein Quadrat werden ſoll, und die vorliegende Aufgabe iſt eine auf weit einfachere Aufgabe zurück geführt, nämlich einen Cubus zu ſuchen, der das Doppelte einer Quadratzahl iſt. Dieſe Aufgabe läßt aber, wie bei der erſten Aufgabe dieſes Buches gezeigt iſt, unzählige Auflöſungen zu.

Daß ſich übrigens die eigentliche Aufgabe auf eine andere zurückführen läßt, oder daß $4x+2$ gerade das Doppelte von $2x+1$ wird, iſt nicht Zufall, ſondern angelegter Plan, wie man aus folgender Betrachtung erſehen wird.

1. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks iſt in jedem Falle ein Product aus der doppelten Summe der beiden Zahlen, woraus das Dreieck gebildet iſt, und aus der größeren der beiden Zahlen. Es ſei z. B. ein Dreieck aus den Zahlen a und b gebildet, und a von beiden die größere, ſo iſt der Umfang $=(a^2+b^2)+(a^2-b^2)+2ab=2a^2+2ab=2(a+b)a$. Daher iſt der Umfang des anfänglich geſetzten Dreiecks $4x^2+6x+2$ offenbar $=2(2x+1)(x+1)$, läßt ſich daher auch durch $x+1$ ohne Reſt dividiren, und der Umfang des neuen, dem vorigen ähnlichen Dreiecks wird $=2(2x+1)=4x+2$, d. h. er iſt die doppelte Summe der Zahlen $x+1$ und x, aus denen das erſte Dreieck gebildet wurde.

2. Wenn man zwei ähnliche Dreiecke hat, und den Flächeninhalt des größeren kennt, ſo findet man den Flächeninhalt des kleinern, wenn man die Fläche des erſten durch das Quadrat der Zahl dividirt, welche das Verhältniß der Seiten anzeigt. Hätte man z. B. zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten na und nb ſind, ſo iſt die Fläche $=\frac{n^2ab}{2}$; die Fläche eines dem vorigen ähnlichen Dreiecks, deſſen Katheten a und b ſind, iſt aber $=\frac{ab}{2}$, und wird gefunden, wenn man $\frac{n^2ab^2}{2}$ durch n^2 dividirt. In dem vorliegenden Falle iſt $n=x+1$, und die Fläche des zweiten Dreiecks kann durch

die Formel $\frac{(x^2+x)(2x+1)}{(x+1)^2}$ vorgeſtellt werden, in welcher der Zähler eigentlich die Fläche des erſten Dreiecks iſt. Addirt man dazu die eine Kathete $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{(2x+1)(x+1)}{(x+1)^2}$, ſo wird die Zahl, welche man zu einem Quadrat machen ſoll

$$=\frac{(x^2+x)(2x+1)+(2x+1)(x+1).}{(1+x)^2}$$

Beide Glieder des Zählers haben den Factor $2x+1$, die Summe der beiden andern Factoren iſt aber

$$(x^2+x)+(x+1)=(x+1)^2.$$

Von den beiden hier addirten Poſten iſt aber der erſte die halbe Kathete des erſten Dreiecks, oder das Product der Zahlen $x+1$ und x, aus welchen das Dreieck gebildet wurde, daher iſt

$$(x^2+x)+(x+1)=(x+1)x+x+1=x^2+2x+1,$$

alſo nothwendig das Quadrat der Zahl $x+1$.

Es iſt daher kein Zufall, daß ſich der Zähler der obigen Formel

$$(x^2+x)(2x+1)+(2x+1)x+1)=2x^3+5x^2+4x+1$$

durch $(x+1)^2$ dividiren läßt, und der Quotient wird nothwendig $2x+1=(x+1)+x$ d. i. die einfache Summe der beiden Zahlen, aus denen das erſte Dreieck gebildet iſt.

XXIII.

Die Aufloͤſung dieſer Aufgabe beruht auf den nämlichen Gründen, welche bei der vorigen Aufgabe entwickelt wurden, und es läßt ſich auf die nämliche Weiſe zei-

zeigen, daß $4x+2$ nicht zufällig, ſondern planmäßig das Doppelte von $2x+1$ wird.

Die Aufgabe, eine Kubikzahl zu ſuchen, welche das Doppelte einer Quadratzahl iſt, kann nach der in der Anmerkung zur erſten Aufgabe dieſes Buchs gegebenen Formel gelöſ't werden, wenn man $m=\frac{1}{2}$ ſetzt.

XXIV.

Der Anſatz führt darauf, daß man $2x^2+2x$ zu einem Quadrat, x^3+2x^2+x zu einem Cubus machen ſoll. Man ſetze

$$2x^2+2x=n^2x^2, \text{ ſo wird } x=\frac{2}{n^2-2}.$$

Nun darf aber die Zahl n nicht willkührlich gewählt werden, denn ſie muß ſo beſchaffen ſein, daß für den Werth $x=\frac{2}{n^2-2}$ auch die Formel x^3+2x^2+x, d. i. $\frac{8}{(n^2-2)^3}+\frac{8}{(n^2-2)^2}+\frac{2}{n^2-2}=\frac{2n^4}{(n^2-2)^3}$, eine Kubikzahl wird. Diophantus betrachtet daher n als eine unbekannte Zahl, und unterſucht, welchen Werth n haben müſſe, damit $\frac{2n^4}{(n^2-2)^3}$ eine Kubikzahl ſei. Nun iſt der Nenner ſchon eine Kubikzahl, es kommt alſo bloß darauf an, den Zähler $2n^4$, oder, weil der Quotient wie das Produkt zweier Kubikzahlen gewiß eine Kubikzahl iſt, den Quotienten $2n^4:n^3$, d. i. $2n$ zu einer Kubikzahl zu machen.

Nun kann man für $2n$ jede beliebige Kubikzahl ſetzen, z. B. 8, ſo wird $x=4$, und um daher die Formel

$2x^2+2x$ zu einem Quadrat zu machen, kann man $n^2=16$, alſo $2x^2+2x=16x^2$ ſetzen, ſo wird

$$x=\frac{2}{16-2}=\frac{1}{7},\ \text{alſo}\ x^2=\frac{1}{49}.$$

Nun entſteht aber eine neue Schwierigkeit, denn für dieſen Werth von x wird die eine Kathete, welche allgemein durch x^2-1 ausgedrückt war, negativ. Man darf daher die Kubikzahl, welche wir $=2n$ geſetzt haben, nicht willkührlich nehmen. Aus der Formel $x=\frac{2}{16-2}$ ergiebt ſich vielmehr, daß 16, d. i. das Quadrat von der Hälfte jenes Cubi, oder wie Diophantus dieſelbe Sache ausdrückt, der vierte Theil von dem Quadrat jenes Cubi größer als 2 ſein müſſe, weil ſonſt $16-2$ negativ wird, aber es ergiebt ſich auch, daß es kleiner als 4 ſein müſſe. Denn geſetzt es wäre $=4$, ſo würde $x=\frac{2}{4-2}=1$, folglich die Kathete $x^2-1=0$, welches widerſprechend iſt.

Man bezeichne daher den Cubus, den man der Zahl $2n$ gleich ſetzen will, allgemein durch x^3, ſo ſoll $\frac{1}{4}x^6$ größer als 2, und kleiner als 4, folglich, wenn man alles mit 4 multiplicirt, x^6 größer als 8 und kleiner als 16 ſein. Um eine Kubokubikzahl dieſer Art zu finden, drücke man die Zahlen 8 und 16 durch Brüche aus, deren Nenner eine Kubokubikzahl iſt, z. B. durch $\frac{512}{64}$ und $\frac{1024}{64}$; nun nehme man irgend eine zwiſchen

beiden Zählern liegende Kubokubikzahl z. B. 729, ſo wird $\frac{729}{64}$ nicht nur eine Kubokubikzahl ſein, ſondern auch zwiſchen den vorgeſchriebenen Grenzen liegen. Aus dieſer Zahl ziehe man die Quadratwurzel, ſo iſt $\frac{27}{8}$ eine zwiſchen den vorgeſchriebenen Grenzen liegende Kubikzahl.

Setzt man alſo $2n=\frac{27}{8}$, ſo wird $n=\frac{27}{16}$, und $n^2=\frac{729}{256}$, ſetzt man endlich

$$2x^2+2x=\frac{729}{256}x^2, \text{ ſo wird } x=\frac{217}{512}.$$

Setzt man dieſen Werth von x in die für die Seiten des Dreiecks gefundenen allgemeinen Ausdrücke $2x$, $x-1$, und x^2+1, ſo werden alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

XXV.

Die vorläufige Aufgabe verlangt, ein Dreieck zu ſuchen, deſſen Fläche $f=7$, und deſſen Umfang $p=12$ ſei. Wenn die Fläche $=f$, ſo iſt das Produkt beider Katheten $=2f$, und man kann daher die eine $=\frac{1}{x}$, die andere $=2fx$ ſetzen. Da p die Summe aller drei Seiten iſt, ſo wird die Hypotenuſe $=p-2fx-\frac{1}{x}$. Man ſetze alſo das Quadrat der Hypotenuſe den Quadraten beider Katheten gleich, ſo erhält man

$$4f^2x^2-4pfx-\frac{2p}{x}+p^2+4f+\frac{1}{x^2}=4f^2x^2+\frac{1}{x^2}$$

und daraus durch weitere Entwickelung

$$4pfx^2-(p^2+4f)x=-2p.$$

Dieſe Gleichung giebt nur dann einen rationalen Werth für x, wenn $\frac{(p^2+4f)^2}{4}-8p^2f$ ein Quadrat iſt, eine Bedingung, welche Diophantus nur in Worte überſetzt hat. Wir ſehen alſo, daß die Auflöſung der Hülfsaufgabe nicht alle Mal möglich iſt, und da für $p=12$ und $f=7$ die obige Formel kein Quadrat wird, ſo muß man für p und f andere Werthe ſetzen, durch welche der obigen Bedingung genügt wird.

Man ſetze alſo $f=x$ und $p=64$, welche Zahl zugleich eine Kubikzahl und eine Quadratzahl iſt. Setzt man dieſe Werthe in die obige Formel, ſo wird

$$\frac{(p^2+4f)^2}{4}=4x^2+8192x+4194304, \text{ und } 8p^2f=32768x,$$

folglich die ganze Formel $=4x^2-24576x+4194304$; dieſe Formel, folglich auch der vierte Theil derſelben d. i. $x^2-6144x+1048576$ ſoll ein Quadrat ſein. Nach den Bedingungen der Aufgabe ſoll aber die Summe des Umfangs und der Fläche, d. i. $x+64$ ebenfalls ein Quadrat ſein, und man hat alſo wieder die doppelte Gleichung, welche hier leicht zu löſen iſt, da 64 nach der Annahme, und $1048576=2048^2$ nach ſeiner Entſtehung ein Quadrat iſt. Hieraus ſieht man ein, warum Diophantus die Zahl 64 ſo wählt, daß ſie zugleich Quadratzahl und Kubikzahl iſt. Letzteres geſchah, weil der Umfang eine Kubikzahl ſein ſollte, erſteres damit das Produkt

1048576.64 gewiß ein Quadrat werde. Um nämlich die doppelte Gleichung aufzulöſen, muß man die erſte Formel mit 64, die zweite mit 1048576 multipliciren, wo denn in beiden Formeln das dritte Glied eine Quadratzahl ſein wird. Nun werden aber auch die letzten Glieder in beiden Formeln den gemeinſchaftlichen Factor $16384 = 128^2$ haben, und man kann beide Formeln durch dieſen gemeinſchaftlichen Factor dividiren. Dadurch wird die eine Formel $= 16384x + 1048576$, die zweite aber $= x^2 - 6144x + 1048576$, alſo der Unterſchied beider $x^2 - 22528x$. Dieſer Unterſchied hat die Factoren x und $x - 22528$, die halbe Summe beider iſt $x - 11264$. Man ſetze alſo

$$(x - 11264)^2 = x^2 - 6144x + 1048576,$$

ſo wird $x = 7680$. Dieſer Werth für x iſt aber nicht zu gebrauchen, weil $8p^2x$ größer als $\frac{(p^2+4x)^2}{4}$ wird. Indeß kann die obige Gleichung noch auf eine andere Art gelöſ't werden, weil in der größern Formel x^2 vorkommt. Der Unterſchied $x^2 - 22528$ hat auch die Factoren $11x$ und $\frac{x}{11} - 2048$, der Unterſchied beider iſt $2048 - 10\frac{10}{11}x$, und deſſen Hälfte $1024 - 5\frac{5}{11}x$. Wenn man nun das Quadrat dieſes Unterſchiedes

$$= 16384x + 1048576$$

ſetzt, ſo erhält man $x = 175\,\frac{44}{225}$, und dieſer Werth von x leiſtet der Aufgabe wirklich Genüge.

kannten Größen durch allgemeine Zeichen auszudrücken, ſo erregen die Fortſchritte der Alten um deſto größere Bewunderung, und man darf wohl fragen, wie ſie ohne Hülfe des den Neuern eigenthümlichen Algorithmus möglich waren. Das Hauptwerk, welches hierüber Belehrung geben konnte, nämlich Diophantus Porismen, iſt verloren gegangen, aber Andeutungen über ſeine Methode haben ſich in den arithmetiſchen Aufgaben, und vorzüglich in der Schrift über die Polygonzahlen erhalten. Die Alten gingen, wie es ſcheint, überall von beſtimmten Zahlen aus, deuteten aber die Rechnung ſelbſt vermuthlich nur an, konnten alſo auf dieſe Weiſe den ganzen Gang der Rechnung verfolgen, das Weſentliche von dem Zufälligen ſondern, und ſo aus dem einzelnen Falle eine allgemeine Regel ableiten.

Von weiterem Umfange und allgemeinerer Anwendbarkeit war aber die in dieſer Schrift gebrauchte Methode, arithmetiſche Sätze durch geometriſche Conſtruction zu finden, oder zu beweiſen. So wie nämlich die neuere Mathematik die Beſtimmungsſtücke räumlicher Größen ſich als Zahlen vorſtellt, und mit dem glücklichſten Erfolg der Rechnung unterwirft, ſo ſtellten die Alten umgekehrt ſich die Zahlen im Allgemeinen als Linien, die Producte zweier Zahlen als Rechtecke, oder bei Gleichheit der Factoren als Quadrate, die Producte dreier Zahlen als Körper, oder bei Gleichheit der Factoren als Würfel, und überhaupt Zahlen von gewiſſen Eigenſchaften als räumliche Größen von entſprechenden

Eigenſchaften vor, und was ſich von dieſen räumlichen Größen durch geometriſche Conſtruction beweiſen ließ, das trugen ſie auf die ihnen entſprechenden Zahlen über. Dadurch erhalten geometriſche Sätze, wie ſie z. B. Euklides in dem zweiten Buch ſeiner Elemente vorträgt, außer dem eigentlichen geometriſchen Sinn, auch noch eine arithmetiſche Bedeutung, und es wird dadurch recht anſchaulich, daß Geometrie und Arithmetik eigentlich nur zwei verſchiedene Arten ſind, Größen ſich vorzuſtellen und zu behandeln.

Das Beſtreben der Alten, die anſchaulichen Formen des Raumes auch in das Gebiet der Arithmetik überzutragen, erkennt man am deutlichſten durch eine Zuſammenſtellung der geometriſchen Benennungen, durch welche die Alten die Eigenſchaften der Zahlen zu bezeichnen ſuchten, und von welchen die Benennungen: Quadratzahl, Polygonzahl, Kubikzahl ſich auch in der neuern Arithmetik aus guten Gründen behauptet haben. Um das Ganze aber zu überſehen, folgen hier Auszüge aus den Schriften des Theon von Smyrna deren Abſicht zwar zunächſt dahin ging, dem Leſer der platoniſchen Schriften das Verſtändniß derſelben zu erleichtern, die aber auch als eine Einleitung in die Arithmetik der Griechen überhaupt, und zu Diophantus Werk ins beſondere dem Leſer nicht unwillkommen ſein werden.

1. Die Zahl iſt ein Zuſammenhang (σύστημα) von Einheiten oder die Vorſchreitung einer Menge, die von

der Einheit anfängt, und eine Rückſchreitung, die in der Einheit endigt. Die Einheit (μονάς) iſt das Feſte und Bleibende der Zahl, wenn dieſe durch Verkleinerung ganz aufgehoben wird. Dieſe giebt der Zahl ihre Geſtalt, iſt ihr Anfang und Element. Die Einheit, als Eins, iſt untheilbar. Denn eine getheilte Zahl wird verkleinert und ihre Theile ſind kleiner als das Ganze. Die Einheit aber, als Zahl, würde durch Theilung vergrößert, indem ſie aus dem Einen ein Vieles würde *). Eins (τὸ ἕν) unterſcheidet ſich von der Einheit, wie das Gezählte von der Zahl. Jenes wird im Empfindbaren angetroffen: die Einheit aber iſt die Idee und die Verſtandesform des Eins, welches untheilbar iſt.

2. Die erſte Eintheilung der Zahlen iſt die in gerade und ungerade.

Gerade (ἄρτιοι) ſind, die in gleiche Theile, ungerade (περιττοί) die nur in ungleiche Theile zerlegt werden können.

Die Einheit haben einige zu den ungeraden gezählt, weil ſie gar nicht, alſo auch nicht in gleiche Theile

*) Dieſe Art zu ſchließen ſchmeckt, wie jeder leicht empfindet, mehr nach Dialektik, als nach Mathematik. Inzwiſchen enthält das Geſpräch Parmenides in Platons Werken eine ſehr ausführliche dialektiſche Unterſuchung über die Untheilbarkeit des Eins worin Argumente, wie das des Platonikers Theon, in großer Menge beigebracht werden. P.

zerlegt werden kann. Sie iſt alſo die erſte Idee des Ungeraden, ſo wie die Zwei die erſte Idee des Geraden iſt. Durch das Hinzukommen der Einheit wird das Gerade ungerad und das Ungerade gerad. Die übrigen Zahlen aber ſind um Eins eine jede größer als die vorhergehende, ſo wie das Verhältniß je zweier nächſten zu einander kleiner iſt, als das zweier vorhergehenden.

In der Reihe 1. 2. 3. 4. 5. 6. - - - - iſt 5 : 6 kleiner als 4 : 5 als 3 : 4, als 2 : 3, als 1 : 2 *).

3. Einige Zahlen heißen die erſten, einfachen (πρῶτοι, ἀσύνθετοι, primi, incompositi) und zwar entweder unbedingt die erſten, oder die erſten in Beziehung auf einander; andere: die zuſammengeſetzten (σύνθετοι, compositi) und zwar ebenfalls unbedingt oder in Beziehung auf einander. Unbedingt erſte ſind, die von keiner Zahl, ſondern bloß von der Einheit gemeſſen werden, als: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Sie werden auch Linienzahlen (γραμμικοί) und geradlinigte (εὐθυμε-

*) Nach dieſen Beſtimmungen iſt die allgemeine Form einer Zahl, n, welches eine Menge von Einheiten bezeichnet. 2n iſt die Form einer geraden; 2n+1 die einer ungeraden. Drei nächſte Zahlen in ihrer allgemeinen Form ſind.

$$n, n+1, n+2$$

Nun iſt $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$; $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$.

Folglich $\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$. P.

τρικοί) genannt, *) weil auch Längen und Linien nur nach einer einzigen Ausdehnung gemeſſen werden. Man nennt ſie auch die ungerad ungeraden.

Die geraden ſind (nach 2.) wenigſtens durch die Zwei meßbar: doch ausgenommen hievon die Zwei, da dieſe nur durch die Einheit gemeſſen wird, folglich zu den unbedingt erſten Zahlen gehört. Gerade Zahlen, außer der Zwei, ſind alſo zuſammengeſetzte. Erſte in Beziehung auf einander ſind ſolche Zahlen, die, wenn auch jede für ſich meßbar, doch kein anderes gemeinſchaftliches Maaß, als die Einheit haben.

4. Unbedingt zuſammengeſetzte Zahlen ſind ſolche, die von einer kleineren, als ſie ſelbſt, gemeſſen werden,

*) Der Grund dieſer Benennung ſcheint darin zu liegen, daß eine ſolche Zahl nur die Linie als entſprechendes räumliches Symbol hat, aber nicht, wie die Flächenzahl unter dem Bilde eines Rechtecks, oder, wie die körperliche Zahl, unter dem Bilde eines Körpers vorgeſtellt werden kann. Das allgemeine Bild einer Primzahl läßt ſich nicht ohne Zweideutigkeit angeben, weil man bis jetzt noch keine allgemeine Form der Primzahlen gefunden hat; die allgemeine Form einer Flächenzahl iſt mn, wo m und n die Seiten (πλευραί) der Zahl mn heißen. Auch nennen die Alten ſowohl das Rechteck zwiſchen zweien Linien μ und ν, als das Produkt zweier Zahlen μ und ν: τὸ ὑπὸ μν; ſo wie das Quadrat ſowohl der Linie als der Zahl μ: τὸ ἀπὸ μ. Schulz.

wie Sechs durch Drei und Zwei. In Beziehung auf einander zuſammengeſetzt ſind ſie, wenn ſie ein gemeinſchaftliches Maaß haben, als 8 und 6 die Zwei; 6 und 9 die Drei.

Zahlen, die aus zwei andern zuſammengeſetzt ſind, heißen Flächenzahlen (ἐπίπεδοι) weil man ſie nach zwei Ausdehnungen, gleichſam Länge und Breite, betrachtet. Die aus drei Zahlen zuſammengeſetzten heißen Körperzahlen στερεοί), weil ſie eine dritte Ausdehnung haben. Den Inhalt (περιοχή) der Zahl nennt man die Vervielfältigung derer, welche ſie zuſammenſetzen, durch einander.

5. Die geraden Zahlen unterſcheiden ſich in gerad gerade, ungerad gerade, und gerad ungerade. Bei der gerad geraden treffen drei Eigenſchaften zuſammen. Sie entſtehen aus der Vervielfältigung zweier geraden durch einander; laſſen ſich bis zur Einheit in keine andere als gerade Zahlen gleich theilen; keiner ihrer gleichen Theile iſt mit einer ungeraden Zahl gleichnamig.

Dergleichen ſind alle Zahlen, die aus der Vervielfältigung der Zwei durch ſich ſelbſt entſtehen. Dieſe haben kein anderes Maaß, als die Zwei und Vielfache der Zwei: alſo laſſen ſie ſich in keine andere als gerade Zahlen gleich theilen, und daher kann auch keiner ihrer gleichen Theile mit einer ungeraden Zahl gleichnamig ſein.

Die 32 entſteht aus 4 und 8, zerlegt ſich in die Halbtheile 16, Viertheile 8, Achttheile 4 nicht aber in Drittheile, Fünftheile und andere den ungeraden gleichnamige Theile.

6. Gerad ungerade Zahlen ſind, die durch die Zwei und eine ungerade Zahl gemeſſen werden, als 2 durch 1, 2; 6 durch 2, 3; 10 durch 2, 5. Ihre Halbtheile ſind daher ungerade Zahlen, die ſich alſo (nach 2) nicht weiter in gleiche Halbtheile zerlegen laſſen.

7. Ungerad gerade Zahlen ſind ſolche, die aus der Vervielfältigung einer geraden und einer ungeraden Zahl durch einander, erwachſen, und ſich einmal in gerade Halbtheile, dann auch in ungerade gleiche Theile zerlegen laſſen. So entſteht 12 aus 3 und 4; zerlegt ſich in Hälften 6, in Drittheile 4, in Viertheile 3 *).

8. Die Flächenzahlen unterſcheidet Theon in gleich gleiche, die aus der Vervielfältigung einer Zahl durch ſich ſelbſt, und in ungleich ungleiche, die aus der Vervielfältigung zweier ungleichen Zahlen durch einander entſtehen. Erſtere nennt er auch Viereckzahlen.

9. Längliche Zahlen (ἑτερομήκεις) **altera parte longiores**) gehören zu den ungleich ungleichen Flächenzahlen und ſind ſolche, deren eine Seite um die Einheit länger iſt, als die andere **). Sie entſtehen auf zweifache Art,

*) Anm. Die allgemeine Form der gerad geraden Zahlen iſt: 2^n, die allgemeine Form der gerad ungeraden $2(2n+1)$; die allgemeine Form der ungerade geraden endlich iſt: $2^n(2n+1)$. P.

**) Bei Marpurg, in ſeinem Progreſſionalcalcul, kommen dieſe unter dem Namen: einlänglichte, vor. P.

Man vergleiche hierbei die bekannte Stelle in Platons Theätetus S. 300. sqq. Edit. Heindorf. Δύνα-

entweder durch Vervielfältgung oder durch Zuſammenzählen.

Stellt man eine ununterbrochene Reihe gerader Zahlen auf:

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. —

ſo iſt

$$2+4=6=2.\ 3$$
$$2+4+6=12=3.\ 4$$
$$2+4+6+8=20=4.\ 5$$
$$2+4+6+8+10=30=5.\ 6$$

u. ſ. w.

μις iſt bei Euklides und Apollonius nicht gerade das Quadrat einer Linie, ſondern überhaupt der Flächenraum, der durch eine Linie beſtimmt wird, ſo wie *δύνασθαι* heißt: einen Flächenraum beſtimmen. Man vergleiche Apollonii Conic. L. I. Th. VIII. IX. X. wo der Parameter der Kegelſchnitte durch *ἡ παρ' ἣν δύνανται αἱ τεταγμένως κατηγμέναι* umſchrieben wird. In der angezogenen Stelle im Theätetus denkt ſich Platon alle Zahlen als *δυνάμεις*, oder als Ausdrücke für Flächenräume, und ſo iſt es einleuchtend, daß alle Zahlen zwar *δυνάμει*, oder wie Platon ſagt: *τοῖς ἐπιπέδοις, ἃ δύνανται* commenſurabel ſind, denn es liegt bei ihnen allen dieſelbe Einheit z. B. ein Quadratfuß *ἡ ποδιαία* (*δύναμις*) zum Grunde. Eben ſo einleuchtend aber iſt es, daß die Seiten oder Wurzeln dieſer Zahlen, inſofern ſie nicht vollſtändige Quadrate ſind, irrational, alſo niemals *μήκει* ſondern bloß *δυνάμει* commenſurabel ſind. Uebrigens iſt es ein abweichender

woraus man ſieht, wie die Summe jeder Anzahl Glieder dieſer Reihe, von der 2 angerechnet, und dieſe inbegriffen, eine längliche Zahl giebt.

Sellt man die geraden und ungeraden Zahlen in ununterbrochener Folge auf:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. . . . . .

ſo ergiebt ſich ſogleich, daß, aus der Vervielfältigung einer jeden derſelben mit der ihr nächſten, eine längliche Zahl entſpringt *).

Sprachgebrauch, wenn Platon jede Linie, deren Quadrat durch eine Quadratzahl vorgeſtellt werden kann, (ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι) ein μῆκος nennt, jede Linie aber, deren Quadrat durch eine ungleichſeitige Flächenzahl (ἀριθμὸν ἑτερομήκη) vorgeſtellt werden muß, eine δύναμις. Ueber den Sinn, den Platon dieſen Ausdrücken beilegt, kann aber gar kein Zweifel entſtehen; μῆκος heißt jede Linie, deren Länge durch eine Rationalzahl vorgeſtellt werden kann, δύναμις jede Linie, deren Länge ſich nur durch eine Irrationalzahl vorſtellen läßt. Schulz.

*) Die allgemeine Form der länglichen Zahlen iſt nach Theons Erklärung: $n(n+1)$. Hieraus wird die zweite von ihm angegebene Entſtehungsart derſelben ſogleich klar. Die erſte folgt aus der Form: $\frac{n(n+1)}{2}$, welche die Summe von n Gliedern einer Reihe ununterbrochener mit Eins wachſender Zahlen, von Eins angerechnet und dieſes inbegriffen, andeutet. Das Doppelte

10. Eine Parallelogrammzahl (ἀριθμὸς παραλληλό-γραμμος) iſt eine ſolche, deren eine Seite die andre um zwei oder eine noch größere Zahl übertrifft, als 2.4=8 *).

11. Die Viereckzahlen (τετράγωνοι) entſtehen auf zweifache Art, entweder aus dem Zuſammenzählen der Glieder einer ununterbrochenen Reihe ungerader Zahlen von Eins ab, oder aus der Vervielfältigung einer Zahl durch ſich ſelbſt.

Ein Beiſpiel der erſtern Art gebe die Reihe:

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. — —

Hier iſt $1+3=4=2.\ 2.$

$1+3+5=9=3.\ 3.$

$1+3+5+7=16=4.\ 4.$ u. ſ. w. **).

dieſer Summe n(n+1), iſt die Summe einer Reihe gerader Zahlen, von 2 angerechnet und dieſes inbegriffen. Alſo iſt dieſe Summe eine längliche Zahl. P.

*) Eben dieſe Zahlen führt Theon in der Folge mit derſelben Erklärung auf, doch unter dem andern Namen: Rechteckzahlen (προμήκεις, oblongi). P.

**) Die allgemeine Form der Summe einer arithmetiſchen Reihe erſter Ordnnng, deren erſtes Glied, 1, und deren Unterſchied, d, iſt $\frac{(2+(n-1)\,d)\,n}{2}$ für n Glieder. Für die Reihe ungerader Zahlen wird d=2, alſo verwandelt ſich jene Form in $\left(\frac{2+2(n-1)}{2}\right)n$ das iſt $(1+n-1)n$ oder n^2, die allgemeine Form der Viereckzahlen. P.

12. In der Reihe:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. . . . . .

iſt die längliche Zahl, die zwiſchen zwei Viereckzahlen liegt, die mittlere des geometriſchen Verhältniſſes einer zu der andern. So iſt 6 die mittlere Verhältnißzahl zwiſchen 4 und 9. Es iſt aber 6=2.3, d. i. die längliche Zahl, die zwiſchen 4 und 9 liegt; und 6.6 iſt =4.9.

Umgekehrt ſteht die zwiſchen zwei länglichen liegende Viereckzahl in keinem ununterbrochenen geometriſchen Verhältniß zu erſteren. Die 6 und die 12 haben die 9 zwiſchen ſich. Allein 6.12 iſt =72, und 9.9=81 *).

13. Die Flächenzahlen (ſ. oben n.4) theilt Theon in Dreieck- Viereck- Fünfeck- Vieleck-Zahlen.

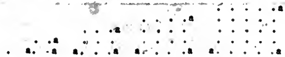
14. Dreieckzahlen (τρίγωνοι) entſtehen durch Zuſammenzählen der Glieder einer Reihe, die mit Eins anfängt,

*) Zwei nächſte Viereckzahlen in ihrer allgemeinen Form ſind: n^2, $(n+1)^2$. Ihre mittlere Verhältnißzahl iſt alſo: $n(n+1)$. Dies iſt eine ganze Zahl, weil jene ganze Zahlen ſind, alſo liegt auch ſie in derſelben Reihe mit ihnen, und zwar ihrer Größe nach zwiſchen n^2 und $(n+1)^2$. Es iſt aber auch die einzige längliche Zahl zwiſchen ihnen: denn gäbe es da noch eine kleinere oder größere, ſo würde auch dieſe die mittlere Verhältnißzahl zweier Viereckzahlen ſein, von denen alſo die größere oder die kleinere zwiſchen n^2 und $(n+1)^2$ fallen würde, welches der Annahme, daß dieſes die nächſten ſind, widerſpräche. P.

und deren zwei nächſte ſich um Eins von einander unterſcheiden. Theon giebt von ihnen folgende Abbildung *).

3 6 10 15 21

15. Von den Viereckzahlen iſt bereits oben bemerkt, daß ſie durch Zuſammenzählen der Glieder einer mit Eins anhebenden Reihe ungerader Zahlen gebildet werden. Hieraus folgt, daß ſie in ihrer ununterbrochenen Folge abwechſelnd gerade und ungerade Zahlen ſein müſſen. Theon giebt von ihnen folgende Abbildung. Zu der Einheit und zu jeder entſtehenden Viereckzahl wird ein Gnomon gefügt, und damit eine neue Viereckzahl gebildet. Jedes folgende Gnomon iſt von dem vorhergehenden um 2 unterſchieden und eine ungerade Zahl.



1 4 9 16 25

Die mit a bezeichneten rechten Winkel ſind die Gnomen.

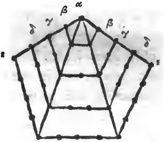
Unterſcheiden ſich die nach und nach zur Einheit hinzugefügten Gnomen um Drei von einander, ſo ent-

*) Die allgemeine Form einer Dreieckzahl iſt alſo einerlei mit der einer Summe von n Gliedern einer ſolchen Reihe, als die hier angegebene, mithin (nach 9); $\frac{n(n+1)}{2}$, hier zeigt n alſo die Stelle an, welche die Dreieckzahl in ihrer Reihe, von Eins an gezählt, einnimmt. P.

ſtehen daraus die Fünfeckzahlen (πεντάγωνοι). Iſt jener Unterſchied Vier, ſo werden Sechseckzahlen (ἑξάγωνοι) gebildet. Auf ſolche Art kann man durch Vergrößerung des Unterſchiedes der Gnomen jede Art Vieleckzahlen (πολύγωνοι) hervorbringen, und die Anzahl der Ecken, wovon ſie benannt werden, iſt ſtets um Zwei größer als der Unterſchied der Gnomen, woraus ſie entſtehn.

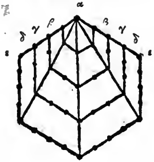
Von Vieleckzahlen giebt Theon folgende Abbildungen:

1) von Fünfeckzahlen



	α	β	γ	δ	ε	
Die Gnomen ſind:	1.	4.	7.	10.	13.	. . .
Die Fünfeckzahlen:	1.	5.	12.	22.	35.	. . . .

2) von Sechseckzahlen



	α	β	γ	δ	ε	
Die Gnomen ſind:	1.	5.	9.	13.	17.	. . . .
Die Sechseckzahlen:	1.	6.	15.	28.	45.	. . . .

16. Die Einheit kann man als eine Vieleckzahl jeder Claſſe derſelben betrachten *). Die Drei iſt nächſt ihr die kleinſte aller Vieleckzahlen, ſo wie das Dreieck unter den Figuren diejenige iſt, welche die mindeſte Anzahl der Seiten hat.

17. Von den Viereckzahlen merkt Theon als etwas beſonderes an, daß ſie entweder einen dritten Theil haben, oder nach davon abgezogener Einheit, einen ſolchen erhalten; eben ſo einen vierten Theil. Einige, die nach abgezogener Einheit einen dritten Theil erhielten, hätten auch einen vierten, wie 4; andere, die nach abgezogener Einheit einen vierten erhielten, hätten auch einen dritten wie 9; einige hätten einen dritten und vierten, wie 36; andere weder den einen noch den andern, bekämen aber nach abgezogener Einheit, beides, wie 25 **).

*) Die allgemeine Form der Summe einer mit Eins anfangenden arithmetiſchen Reihe erſter Ordnung (ſ. n. 11) iſt $\frac{(2+(n-1)d)n}{2}$. Dies iſt alſo auch die einer Vieleckzahl, deren Stelle in ihrer Reihe, von Eins an gezählt, n iſt. Setzt man n=1, ſo verwandelt ſich dieſe Form in 1. Alſo kann man auch die Einheit unter derſelben Form darſtellen, was auch d bedeuten möge.

**) Da (nach 2) jede gerade Zahl die Form 2n, und jede ungerade die Form 2n+1 hat, ſo hat jede Vier-

18. Die Summe zweier nächſten Dreieckzahlen iſt eine Viereckzahl *).

19. Kreiszahlen, Kugelzahlen (κύκλικοι, σφαιροειδεῖς) ſind ſolche, die durch eine ein- oder mehrmalige Vervielfältigung durch ſich ſelbſt, jederzeit auf dieſelbe Zahl zurückkehren, als $5.5=25$; $25.5=125$; $6.6=36$; $36.6=216$.

20. Die Körperzahlen (ſ. n. 4) haben entweder gleiche, oder ungleiche Seiten; im letztern Falle ſind dieſe entweder alle ungleich, oder zwei gleich, und die ungleiche iſt entweder die längſte oder die kürzeſte der drei Seiten. Die von drei gleichen Seiten heißen Würfelzahlen (κύβοι); die von drei ungleichen werden Altarzahlen (βωμίσκοι) genannt; die zwei gleiche Seite haben, heißen Ziegelzahlen (πλινθίδες), wenn die ungleiche die kürzere, und Balkenzahlen (δοκίδες), wenn jene die längere iſt.

21, Noch giebt es bei Theon Pyramidenzahlen (πυραμοειδεῖς) und abgekürzte Pyramiden oder Kolur-

eckzahl entweder die Form $4n^2$, oder die: $4n^2+4n+1$, und iſt daher an ſich ſelbſt, oder nach abgezogener Einheit, durch 4 theilbar. Ferner ſind alle Zahlen, allgemein dargeſtellt, entweder $3n$ oder $3n+1$, oder $3n+2$, für jeden Werth von n, auch wenn $n=0$, mithin alle Viereckzahlen entweder $9n^2$, oder $9n^2+6n+1$ oder $9n^2+12n+4$, und daher entweder ſo fort, oder nach abgezogener Einheit, durch 3 theilbar. P.

*) Die allgemeine Form der Summe zweier nächſten Dreieckzahlen iſt $\frac{(n+1)n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2$ P.

zahlen (κολουροπυράμιδες), von Kolur, einer abgekürzten Pyramide, ſo benannt. Sie heißen auch Trapezzahlen (τραπέζια) *)

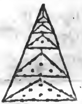
Zur Erleichterung der Mühe des Leſens deuten wir hier kurz den Gang der Beweisführungen an:

Satz II.

Drei Zahlen a, b, c, von gleichem Unterſchiede Δ; a die größeſte, b die mittlere, c die kleinſte: zu beweiſen iſt, daß $8ab + c^2 = (a + 2b)^2$

---

*) Von dieſen giebt Ismael Bulliald in ſeinen Anmerkungen zu Theon folgende Abbildung.



Dies iſt eine Dreieckpyramide, deren horizontale Durchſchnitte Dreieckzahlen vorſtellen. Nimmt man der Pyramide die Spitze, ſo heißt ſie ein Kolur. Verkürzt man ſie bis auf die zweite Horizontalfläche, ſo heißt ſie ein Dikolur. Bei ferneren Verkürzungen heißt ſie ein Trikolur u. ſ. w.

Alle dieſe bildlichen Darſtellungen waren Hülfsmittel, ſich Summen von Zahlenreihen anſchaulich zu machen. Bei dem gegenwärtigen Zuſtande der Mathematik ſind es wohl nicht viel mehr als Spielwerke. Wer daran Geſchmack findet, kann ſich in Marpurgs angeführtem weitläuftigem Werke überſättigen; und wird daſelbſt noch verſchiedene andere Erfindungen dieſer Gattung z. B. Thurm- und Säulen-Zahlen antreffen.

Es iſt $a=b+\Delta$; folglich

$$8ab=8b^2+8b\Delta.$$

Durch geometriſche Conſtruction wird bewieſen, daß

$$a^2=c^2+4b\Delta, \text{ d. h. } (b+\Delta)^2=(b-\Delta)^2+4b\Delta.$$

$$\text{mithin } 8ab+c^2=4b^2+4b^2+4b\Delta+a^2$$
$$=4b^2+4ba+a^2.$$

Durch geometriſche Conſtruction wird ferner bewieſen, daß

$$4b^2+4ba+a^2=(2b+a)^2,$$

woraus der Satz erhellet.

Bemerkenswerth iſt hier und bei den folgenden Sätzen die unmittelbare Anwendung der von Theilung der Linien geltenden Sätze und geometriſcher Conſtructionen auf Zahlen, worin Diophantus, deſſen Theorie der Polygonzahlen ſich übrigens an die Bücher 7. 8. 9 der Elemente des Euklides anſchließt, von der ſtrengen Methode des letzteren abweicht.

Satz III.

Es ſind die Zahlen a, b, c, d, ſo viel man will, von gleichem Unterſchiede Δ; a die größte, b die nächſt kleinere, u. ſ. w. fort. Zu zeigen, daß der Unterſchied der größten und kleinſten, $a-d$, gleich ſei dem Unterſchiede Δ zweier nächſten, vervielfacht durch die um Eins verkleinerte Anzahl der gegebenen, welche n ſei; d. h. daß $a-d=(n-1)\Delta$.

Es iſt

$$a - b = \Delta$$
$$b - c = \Delta$$
$$c - d = \Delta$$

Da nun dergleichen Verbindungen ſoviel ſind als Zahlen weniger Eins, ſo folgt durch Summirung

$$a - d = (n - 1)\,\Delta.$$

Sätze IV. V.

Dieſe zwei Sätze ſind vielmehr zwei Fälle eines einzigen in IV allgemein gefaßten Theorems.

Es ſind die Zahlen a, b, c, d, e, f, ſoviel man will, von gleichem Unterſchiede Δ. Zu zeigen, daß die größte, a, und kleinſte, b, zuſammengenommen, vervielfacht durch n, die Anzahl der gegebenen, die doppelte Summe s der gegebenen mache, d. h. daß $n(a+f)=2s$.

Erſter Fall: n ſei eine Paarzahl: 2r.

Da $a-c=d-f$, ſo iſt

$a+f=c+d$. Auf gleiche Weiſe iſt

$a+f=b+e$, und $a+f=a+f$

mithin $r(a+f)=s$, und $n(a+f)=2s$.

Zweiter Fall: n ſei eine Unpaarzahl: $2r+1$.

Jetzt ſei gegeben die Reihe a, b, c, d, e. Es iſt

$$a-c=c-e, \text{ daher}$$
$$a+e=2c; \text{ eben ſo}$$
$$b+d=2c; \text{ folglich}$$
$$s-c=r.2c=r(a+e)$$
$$2s=2r(a+e)+2c=(2r+1)(a+e)=n(a+e).$$

Saß VI.

Eine Reihe von Zahlen gleichen Unterſchiedes, von der Einheit ab, ſei gegeben 1. a. b. c. Der Unterſchied zweier aufeinander folgender ſei $=\Delta$. Zu beweiſen iſt, daß

$$8s\Delta+(\Delta-2)^2=(\Delta(2n-1)+2)^2.$$

Es iſt

$$s=\frac{n(c+1)}{2}=\frac{n(c-1)}{2}+n\text{(IV. V)}$$

und $c-1=(n-1)\Delta$(III.) Daher iſt

$$s=\frac{n(n-1)\Delta}{2}+n$$

Alſo iſt zu beweiſen, daß

$$8\Delta\left(\frac{n(n-1)\Delta}{2}+n\right)+(\Delta-2)^2=(\Delta(2n-1)+2)^2.$$

Nun iſt

$$\Delta\frac{n(n-1)\Delta}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2;\ \text{mithin}$$

$8\Delta\frac{n(n-1)\Delta}{2}=4n(n-1)\Delta^2$. Daher zu beweiſen, daß

$$4n(n-1)\Delta^2+8n\Delta+(\Delta-2)^2=(\Delta(2n-1)+2)^2.$$

Es iſt

$$4\Delta=2.2\Delta,\ \text{und}$$

$$2.2\Delta+(\Delta-2)^2=\Delta^2+2^2,\ \text{daher auch}$$

$$2.2n\Delta+(\Delta-2)^2=2.2(n-1)\Delta+\Delta^2+2^2.$$

Alſo iſt zu beweiſen, daß

$$4n(n-1)\Delta^2+8n\Delta+(\Delta-2)^2=4n(n-1)\Delta^2+2.2(2n-1)\Delta+\Delta^2+2^2$$

eine Quadratzahl ſei.

Es iſt aber

$4n(n-1)\Delta^2+\Delta^2=\Delta^2(4n^2-4n+1)=\Delta^2(2n-1)^2$;

mithin zu zeigen, daß

$$\Delta^2(2n-1)^2+2.2(2n-1)\Delta+2^2$$

eine Quadratzahl ſei. Dieſe aber iſt

$$=(\Delta(2n-1)+2)^2;$$

folglich der Satz erwieſen.

Satz VIII.

Setzen wir irgend eine Zahl $\Delta+2$; $\Delta>2$, und bilden die Reihe von drei Gliedern

$$\Delta+2,\ \Delta,\ \Delta-2,$$

ſo iſt, nach II.

$$8(\Delta+2)\Delta+(\Delta-2)^2=(\Delta+2+2\Delta)^2$$
$$=(\Delta(2.2-1)+2)^2$$

Setzen wir nun eine Reihe von Zahlen

$1,\ 1+\Delta,\ 1+2\Delta$ u. ſ. w, wo $\Delta=1$ oder irgend eine Zahl, ſo erhalten wir daraus die erſte Polygonzahl in ihrer Reihe $=\Delta+2$, deren Eckenzahl $=\Delta+2$, und deren Seite $=2$. Es iſt aber auch

$$\Delta+2=1+(1+\Delta)=s,$$

Mithin erhalten wir hier nach VI. dieſelbe Auflöſung für $\Delta+2$, als oben, s iſt alſo eine Polygonzahl, deren Seite $=n$, und deren Eckenzahl $=\Delta+2$.

Satz X.

Daß dieſer Satz ein Bruchſtück iſt, hindert nicht, das Ganze dennoch als geſchloſſen zu betrachten. So wie der Verfaſſer ſeinen Plan gleich in dem erſten Satze beſtimmt angegeben hat, ſo iſt er mit dem achten und neunten ausgeführt; das hier gegebene Bruchſtück hat alſo ganz das Anſehen eines fremdartigen Zuſatzes, der ohne Beeinträchtigung des Ganzen weggelaſſen werden könnte.

Von der figurirten Zahlen Form, und ihrem Gebrauch bei arithmetiſchen Reihen.

Von
Friedrich Theodor Poſelger.

1. Eine arithmetiſche Reihe oder Progreſſion heißt eine Folge von Zahlen, deren je zwei nächſte Glieder einerlei Differenz haben.

2. Eine Zahlenreihe, deren zwei nächſte Glieder verſchiedene Differenzen haben, heißt eine arithmetiſche Reihe höherer Ordnung.

3. Die Differenzen der Reihen letzterer Art heißen veränderliche, weil es auch von ihnen Differenzen giebt. Nicht ſo die der erſteren Art, daher dieſe die beſtändigen heißen.

4. Fängt eine arithmetiſche Progreſſion mit Eins an, und zählt man ihre Glieder von Eins, ſo hat die erſte Zahl nach Eins die zweite Stelle in der Reihe, und iſt die Summe von Eins zugezählt zu der beſtändigen Differenz. Zählt man zu dieſer Summe wieder die Differenz, zu der darauskommenden Summe nochmals, und ſo fort: ſo entſteht die zweite, dritte und folgende Zahl der Reihe an der dritten, vierten und folgenden Stelle.

Man ſetze den beſtändigen Unterſchied, d, die Zahl der Stelle eines Gliedes, n, Eins mitgerechnet: ſo iſt die dazu gehörige Zahl $= 1 + (n-1)d$.

5. Summirt man die zwei erſten Glieder der ſo entſtandenen Reihe, ſetzt zur Summe das folgende, und zur neuen Summe wieder das folgende, ſo erhält man eine Reihe, wovon jene die Differenzenreihe iſt. Die neuentſtandene heißt eine Reihe zweiter Ordnung, weil erſt die Differenzen ihrer Differenzen beſtändige ſind.

6. Ihre Glieder heißen Polygon- oder Vieleckzahlen. Die Menge der Einheiten, welche die erſte derſelben enthält, iſt die Anzahl der Ecken, wovon jede andere in derſelben Reihe den Namen einer Vieleckzahl bekommt; die Seite einer Polygonzahl iſt ihre Stelle in der Reihe, Eins mitgerechnet. Die, welche in ihrer Reihe die erſte iſt, muß mindeſtens Drei ſein. Dann folgt Vier, Fünf, und jede andere mit Eins wachſende Zahl. Die Seite einer ſolchen erſten Vieleckzahl iſt die Zwei (Dioph. I.) Nach ihr werden die übrigen in derſelben Reihe: Dreieck- Viereck- Fünfeck-Zahlen, und ſo weiter genannt.

7. Setzt man, wie vorhin, die beſtändige Differenz $= d$, und die Stellenzahl eines Gliedes der dazu gehörigen Reihe $= n$, ſo iſt das erſte Glied derſelben nach der Eins, gemäß der eben angegebenen Form,

$$1 + (n-1)d, = 1 + (2-1)d = 1 + d,$$

alſo die erſte daraus erwachſende Polygonzahl (nach 5

und 6) $=1+1+d=2+d$, welches alſo die Menge der Ecken jeder andern in derſelben Reihe iſt.

8. O . A . K . . N . . . B — R
H . M — T.

Es ſei AK die Einheit; KB der beſtändige Unterſchied $=d$ einer arithmetiſchen Progreſſion; HT die Anzahl der in ihr gegebenen Glieder $=n$, Eins mitgerechnet; OA wieder die Einheit; NR gleich dem Produkt der Summe von HT und TM in KB, alſo $NR=(2n-1)d$; und KN ſei $=2$: ſo iſt, wenn man die Summe der gegeben n Glieder $=s$ ſetzt (Dioph. VI.)

$$8sd+(d-2)^2=((2n-1)d+2)^2. \text{ Alſo}$$

$$s=\frac{((2n-1)d+2)^2-(d-2)}{8d}.$$

$OB=d+2$ iſt die erſte Polygonzahl. Da nun

$$NB=d-2,\ KB=d,\ OB=d+2,$$

drei Zahlen von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt (Dioph. II.)

$$8OB.d+(d-2)^2=(3d+2)^2$$
$$=((2.2-1)d+2)^2, \text{ alſo}$$

$$OB=\frac{((2.2-1)d+2)^2-(d-2)^2}{8d}.$$

Wird alſo in der Gleichung für s, die Stellenzahl n, oder die Menge der gegebenen, Eins mitgerechnet, $=2$ geſetzt, ſo verwandelt ſie ſich in die für OB. Aber auch s verwandelt ſich in OB, weil alsdann die gegebene Reihe, nur aus zwei Gliedern, Eins und der gegebenen Zahl, $d+1$, beſteht, deren Summe $=OB$. Es iſt alſo s von

OB in nichts als der Stellenzahl verſchieden. Folglich iſt s, ihre Größe bei Seite geſetzt, in ihrer Form nichts anders als OB, das iſt, eine Polygonzahl von d+2 Ecken und von der Seite n.

9. Man ſetze alſo irgend eine Polygonzahl = P, ſo iſt unter den vorigen Annahmen

$$P = \frac{((2n-1)d+2)^2-(d-2)^2}{8d}$$

$$= \frac{(n^2-n)d+2n}{2}.$$

Iſt nun d = 1 und d + 2 = 3, ſo iſt P eine Dreieckzahl

$$= \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Für d = 2 iſt d + 2 = 4, P eine Viereckzahl $= n^2$.

Für d = 3 iſt d + 2 = 5, P eine Fünfeckzahl $= \frac{3n^2-n}{2}$ und ſo weiter.

10. Setzt man n als unbekannt = x, ſo wird es aus der Polygonzahl P und der Anzahl ihrer Ecken, d+2, mittelſt Auflöſung einer quadratiſchen Gleichung gefunden. Siehe Klügel Art. Polygonzahl.

11. Wird d als unbekannt, und n beliebiger Annahme geſetzt, das heißt, will man wiſſen, in welchen verſchiedenen Zahlenreihen die gegebene, P, als Polygonzahl angetroffen wird, und an welchen Stellen in denſelben, (Dioph. X.) ſo dient dazu die Gleichung

$$\frac{2(P-n)}{n(n-1)} = d.$$

So findet man z. B. daß die Zahl 120 unter den Polygonzahlen von 120 Ecken die zweite Stelle hat, unter

denen von 41 die dritte; von 6 die achte und von 3 die funfzehnte: weiter aber in keiner andern Reihe ganzer und poſitiver Polygonzahlen angetroffen wird.

12. Summirt man die Glieder einer ununterbrochnen Reihe von Polygonzahlen von Eins ab, eben ſo als es, zur Bildung derſelben, mit der Reihe erſter Ordnung von der beſtändigen Differenz d geſchah, ſo erhält man eine Reihe der dritten Ordnung; aus dieſer auf gleiche Weiſe eine der vierten, und ſo weiter.

13. Alle dieſe Reihen, wovon die Polygonzahlen nur eine beſondere Gattung ausmachen, begreift man unter dem Namen: **figurirte Zahlen.** Beſonders bezeichnet man mit dieſem Namen diejenigen Zahlenreihen, deren letzte Differenz $d = 1$ iſt.

14. Es ſei $d = 1$, ſo iſt die erſte Reihe figurirter Zahlen bis zur r^{ten} Stelle.

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ r-1.\ r.$$

Die Glieder der zweiten Reihe, oder die Dreieckzahlen haben (nach 9) für jede r^{te} Stelle die Form $\frac{(r+1)r}{1.2}$. Hierauf bringe man jedes Glied und ordne ſie der erſten unter:

$$\frac{2.1}{1.2};\ \frac{3.2}{1.2};\ \frac{4.3}{1.2};\ \frac{5.4}{1.2};\ \frac{6.5}{1.2};\ \frac{7.6}{1.2}\ldots\frac{r(r-1)}{1.2};\ \frac{(r+1)r}{1.2}.$$

das iſt: $1.\ 3.\ 6.\ 10.\ 15.\ 21\ \ldots\ldots\ \frac{(r+1)r}{1.2}$.

Das

Das Eins läßt ſich auf dieſe allgemeine Form bringen: $\frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots\ldots.(r+1)r}{1\ .\ 2\ldots\ldots(m-1)m}$. Denn man ſetze $r=1$, ſo verwandelt ſich jene Form in dieſe:

$$\frac{m(m-1)\ldots.2.1}{1\ .\ 2\ldots.(m-1)m}=1.$$

Man ſetze, dieſem gemäß, für die dritte Reihe $1=\frac{3.2.1}{1.2.3}$; ſummire dies mit dem zweiten Gliede der zweiten Reihe, das daraus entſtandene zweite der dritten mit dem dritten der zweiten, und ſo fort, ſo erhält man das erſte Glied $\frac{3.2.1}{1.2.3}=1$, das zweite

$$\frac{3.2.1}{1.2.3}+\frac{3.2}{1.2}=\frac{3.2}{1.2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4.3.2}{1.2.3}.$$

das dritte $\frac{4.3.2}{1.2.3}+\frac{4.3}{1.2}=\frac{4.3}{1.2}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5.4.3}{1.2.3}$. Wäre nun die Form eines Gliedes dieſer Reihe an der $(r-1)$ſten Stelle: $\frac{(r+1)\ r\ (r-1)}{1.\ 2.\ 3}$, ſo würde man für die nächſte $r$te Stelle erhalten:

$$\frac{(r+1)r(r-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}+\frac{(r+1)r}{1\ .\ 2}=\frac{(r+1)r}{1\ .\ 2}\left(\frac{r-1}{3}+1\right)$$
$$=\frac{(r+2)(r+1)r}{1\ .\ 2\ .\ 3},$$

welches dieſelbe Form für das $r$te Glied iſt, als jene für das $(r-1)$ſte Glied, indem bloß für die um Eins höhere Stelle, $r+1$ für r geſetzt wird. Da alſo das erſte, zweite und dritte Glied jene Form hat, ſo hat eben dieſe auch das vierte, und daher auch das fünfte und jedes folgende Glied.

Rr

Setzt man nun für die Ordnungszahl einer Reihe den allgemeinen Ausdruck m, und für die Stellenzahl eines Gliedes in dieſer Reihe, r, ſo kann man die allgemeinen Formen der Glieder an der r^{ten} Stelle, in der erſten, zweiten und dritten Reihe, nämlich

$\frac{r}{1}$, für die erſte Reihe,

$\frac{(r+1)r}{1\,.\,2}$, für die zweite,

$\frac{(r+2)(r+1)r}{1\,.\,2\,.\,3}$, für die dritte,

unter ſich auf dieſe noch allgemeinere Form bringen:

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\dots(r+1)r}{1\,.\,2\,\dots\,(m-1)m}.$$

Eins hat, wie oben bemerkt iſt, für die um 1 höhere, vierte Reihe eben dieſe Form; alſo, ſtatt m, m+1 geſetzt:

$$\frac{(r+m)(r+m-1)\dots\dots(r+1)r}{1\,.\,2\,\dots\dots\,m(m+1)},$$

und wenn r=2 geſetzt wird, für r−1:

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)-(r+1)r(r-1)}{1\,.\,2\,\dots\dots\,m(m+1)}.$$

In dieſer allgemeinen Form iſt die Summe des erſten Gliedes der vierten mit dem zweiten der dritten Reihe:

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\dots r(r-1)}{1\,.\,2\,\dots\,m(m+1)}$$

$$+\frac{(r+m-1)(r+m-2)\dots\dots(r+1)r}{1\,.\,2\,\dots\dots\,(m-1)m}$$

$$=\frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots r}{1\;.\;2\ldots\ldots m}\left(\frac{r-1}{m+1}+1\right)$$

$$=\frac{(r+m)(r+m-1)(r+m-2)\ldots r}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots m(m+1)}.$$

Und dies iſt eben die oben angeführte allgemeine Form eines Gliedes der erſten drei Reihen, ſtatt m, m+1, geſetzt. Sie nimmt, r=3 geſetzt, für das zweite Glied wieder dieſe Geſtalt an:

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots(r-1)}{1\;.\;2\;.\ldots m(m+1)}.$$

Folglich gilt ſie auch für das vierte und daher für jedes folgende der vierten Reihe. Da aber Eins in jeder nächſten höheren Reihe durch eben dieſe Form ausgedrückt werden kann, ſo gilt ſie auch für jede nächſt höhere Reihe allgemein. Folglich iſt jedes Glied an der r^{ten} Stelle in der Reihe m^{ter} Ordnung der figurirten Zahlen =

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots\ldots(r+1)r}{1\;.\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;(m-1)m}.$$

15. Hiernach wird das Glied jeder Stelle in der Reihe jeder Ordnung durch die Stellenzahl und Ordnungszahl beſtimmt. Eben ſo die Summe von einer Anzahl Gliedern von Eins ab, dies inbegriffen, in irgend einer Ordnung, durch die Anzahl der Glieder und die Ordnungszahl der nächſt höheren Reihe.

Man verlangt z. B. das 10te Glied in der Reihe 10ter Ordnung. Hier iſt r=10, m=10, folglich

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots(r+1)r}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;(m-1)m}=$$

$$= \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$
$$= 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 2 = 92378.$$

Man verlangt die Summe von 10 Gliedern in der Reihe 10ter Ordnung. Hier iſt $m+1=11$, $r=10$. Alſo

$$\frac{(r+m)(r+m-1) - - (r+1)r}{1 \;.\; 2 - - - - m(m+1)} =$$
$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}$$
$$= 20 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 2 = 167960.$$

Die allgemeine Form der Quadratzahlen, n^2, läßt ſich wie ſchon Theon bemerkt hat, auf die Form der Summe zweier nächſten Dreieckzahlen $\frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$, zurückbringen. Alſo iſt die Summe von n Quadratzahlen von Eins ab =

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$= \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n+2+n-1) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Die Würfelzahlen n^3, nehmen dieſe gleichbedeutende Form an: $n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 6$. Alſo iſt ihre Summe von Eins ab, dieſe:

$$\frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 6$$
$$= \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2}\left(1 + \frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)$$
$$= \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2}\left(\frac{2+(n+2)(n-1)}{2}\right)$$
$$= \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2}\left(\frac{2+n^2+n-2}{2}\right) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

16. Die Formen der figurirten Zahlen ſind wegen ihres Ebenmaßes, ihrer großen Einfachheit und Geſchmeidigkeit, wohl an ſich ſchon der Betrachtung werth; außerdem haben ſie für die ganze Analyſis den vielſeitigſten Nutzen, beſonders da, wo die Glieder eines allgemeinen Ausdrucks mit Zahlencoefficienten verſehen ſind, um dieſe ebenfalls unter allgemeine Formen zu bringen. Dies wollen wir nun an einigen Beiſpielen zeigen.

17. Die erſten zwei Glieder einer rücklaufenden Reihe ſein A, B; die zurückweiſende Skale (Beziehungs-Skale, scala relationis) ſei $+\beta$, $-\alpha$. Jedes folgende Glied iſt die Summe des Produkts von β in das nächſt vorhergehende und von $-\alpha$ in das zweite vorhergehende Glied. Folglich ergeben ſich, wenn man die Stellen vom zweiten Gliede zu zählen anfängt, die Glieder jeder Stelle, wie folgt:

0. A

1. B

2. $B\beta - A\alpha$

3. $B\beta^2 - A\alpha\beta - B\alpha$

4. $B\beta^3 - A\alpha\beta^2 - 2B\alpha\beta + A\alpha^2$

5. $B\beta^4 - A\alpha\beta^3 - 3B\alpha\beta^2 + 2A\alpha^2\beta + B\alpha^2$

6. $B\beta^5 - A\alpha\beta^4 - 4B\alpha\beta^3 + 3A\alpha^2\beta^2$
$+ 3B\alpha^2\beta - A\alpha^3$

7. $B\beta^6 - A\alpha\beta^5 - 5B\alpha\beta^4 + 4A\alpha^2\beta^3$
$+ 6B\alpha^2\beta^2 - 3A\alpha^3\beta - B\alpha^3$

8. $B\beta^7 - A\alpha\beta^6 - 6B\alpha\beta^5 + 5A\alpha^2\beta^4$
$+ 10B\alpha^2\beta^3 - 6A\alpha^3\beta^2 - 4B\alpha^3\beta + A\alpha^4.$

Man will wiſſen, wie die in dieſen Reihen von Ausdrücken vorkommenden Zahlen von der Stellenzahl jeder Reihe abhängen, und ſich durch dieſelbe in allgemeiner Form darſtellen laſſen?

Eine ſolche allgemeine für obige Glieder geltende Form iſt leicht gefunden, wenn man bemerkt, wie die Potenzzahlen von β rechtshin abnehmen, und wie die Potenzzahlen von α zunehmen, und daß die Zahlencoefficienten der Glieder figurirte Zahlenreihen der von 1 ab nach einander folgenden Ordnungen ſind.

Man bezeichne, der Kürze wegen, die Glieder der figurirten Zahlenreihe

erſter Ordnung mit $^1\mathfrak{A}$, $^2\mathfrak{A}$, $^3\mathfrak{A}$, ... $^r\mathfrak{A}$ —
zweiter — — — $^1\mathfrak{B}$, $^2\mathfrak{B}$, $^3\mathfrak{B}$, ... $^r\mathfrak{B}$ —
dritter — — — $^1\mathfrak{C}$, $^2\mathfrak{C}$, $^3\mathfrak{C}$, ... $^r\mathfrak{C}$ —
u. ſ. w.,

ſo daß jeder folgende Buchſtab eine um Eins höhere Ordnung, und die demſelben links vorgeſetzte Zahl die Stelle der figurirten Zahl in ihrer Reihe bedeute. So laſſen ſich die oben bereits entwickelten Glieder für die r^{te} und $(r+1)^{ſte}$ Stelle, wie folgt allgemein ausdrücken:

$$r)\ B\beta^{r-1} - A\alpha\beta^{r-2} - \overset{r-2}{\mathfrak{A}}B\alpha\beta^{r-3} + \overset{r-3}{\mathfrak{A}}A\alpha^2\beta^{r-4}$$
$$+ \overset{r-4}{\mathfrak{B}}B\alpha^2\beta^{r-5} - \overset{r-5}{\mathfrak{B}}A\alpha^3\beta^{r-6} - \overset{r-6}{\mathfrak{C}}B\alpha^3\beta^{r-7}$$
$$+ \overset{r-6}{\mathfrak{C}}A\alpha^4\beta^{r-8} + \ldots$$

$$r+1)\ B\beta^{r} - A\alpha\beta^{r-1} - \overset{r-1}{\mathfrak{A}}B\alpha\beta^{r-2} + \overset{r-2}{\mathfrak{A}}A\alpha^2\beta^{r-3}$$

$$+\overset{r-3}{\mathfrak{B}}B\alpha^2\beta^{r-4}-\overset{r-4}{\mathfrak{B}}A\alpha^3\beta^{r-5}-\overset{r-5}{\mathfrak{C}}B\alpha^3\beta^{r-6}+\overset{r-6}{\mathfrak{C}}A\alpha^4\beta^{r-7}+\ldots$$

Multiplicirt man den Ausdruck der $(r+1)^{ſten}$ Stelle mit $+\beta$ und den der r^{ten} Stelle mit $-\alpha$, ſo erhält man, nach dem Geſetz der Reihe den Ausdruck für die $(r+2)^{te}$ Stelle. Derſelbe iſt alſo

$$B\beta^{r+1}-A\alpha\beta^{r}\left.\begin{matrix}-\overset{r-1}{\mathfrak{A}}\\ -1\end{matrix}\right\}B\alpha\beta^{r-1}\left.\begin{matrix}+\overset{r-2}{\mathfrak{A}}\\ +1\end{matrix}\right\}A\alpha^2\beta^{r-2}\left.\begin{matrix}+\overset{r-3}{\mathfrak{B}}\\ +\overset{r-2}{\mathfrak{A}}\end{matrix}\right\}B\alpha^2\beta^{r-3}$$

$$\left.\begin{matrix}-\overset{r-4}{\mathfrak{B}}\\ -\overset{r-3}{\mathfrak{A}}\end{matrix}\right\}A\alpha^3\beta^{r-4}\left.\begin{matrix}-\overset{r-5}{\mathfrak{C}}\\ -\overset{r-4}{\mathfrak{B}}\end{matrix}\right\}B\alpha^3\beta^{r-5}\left.\begin{matrix}+\overset{r-6}{\mathfrak{C}}\\ +\overset{r-5}{\mathfrak{B}}\end{matrix}\right\}A\alpha^4\beta^{r-6}\begin{matrix}+\ldots\\ +\ldots\end{matrix}$$

Jeder Coefficient in dieſem Ausdruck iſt die Summe einer figurirten Zahl mit einer ſolchen von einer um Eins niedrigern Stelle in einer um Eins höheren Ordnung. Alſo iſt jenes Glied (nach 14):

$$B\beta^{r+1}-A\alpha\beta^{r}-\overset{r}{\mathfrak{A}}B\alpha\beta^{r-1}+\overset{r-1}{\mathfrak{A}}A\alpha^2\beta^{r-2}$$
$$+\overset{r-2}{\mathfrak{B}}B\alpha^2\beta^{r-3}-\overset{r-3}{\mathfrak{B}}A\alpha^3\beta^{r-4}-\overset{r-4}{\mathfrak{C}}B\alpha^3\beta^{r-5}$$
$$+\overset{r-5}{\mathfrak{C}}A\alpha^4\beta^{r-6}+\overset{r-6}{\mathfrak{D}}B\alpha^4\beta^{r-7}-\ldots$$

In dieſem hängen die numeriſchen Coefficienten und Zahlenpotenzen gerade ſo von der Stellenzahl, $r+2$, ab, als in dem Ausdrucke für die r^{te} und $(r+1)^{ſte}$ Stelle von r und $r+1$. Da nun, wenn man ſtatt $r+2$ wieder $r+1$ ſetzen wollte, die nämliche Operation auch die nämliche Form für den Ausdruck der um Eins höheren Stelle ergeben müßte, ſo iſt ſie allgemein für jede

Stelle. Mithin iſt das Glied der rücklaufenden Reihe auf der n^{ten} Stelle, vom zweiten angerechnet, =

$$B\beta^{n-1} - A\alpha\beta^{n-2} - \overset{n-2}{\mathfrak{A}}B\alpha\beta^{n-3} + \overset{n-3}{\mathfrak{A}}A\alpha^2\beta^{n-4}$$

$$+ \overset{n-4}{\mathfrak{B}}B\alpha^2\beta^{n-5} - \overset{n-5}{\mathfrak{B}}A\alpha^3\beta^{n-6} - \overset{n-6}{\mathfrak{C}}B\alpha^3\beta^{n-7} + \ldots$$

$$= B\beta^{n-1} - A\alpha\beta^{n-2} - \frac{n-2}{1}B\alpha\beta^{n-3} + \frac{n-3}{1}A\alpha^2\beta^{n-4}$$

$$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}B\alpha^2\beta^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)}{1.2}A\alpha^3\beta^{n-6}$$

$$- \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}B\alpha^3\beta^{n-7} + \ldots$$

Anmerkung.

Eine ſolche rücklaufende Reihe giebt die Gleichung:

$$\sin. n\varphi = 2\cos\varphi \sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi.$$

Hier iſt $A = \sin 0\varphi = 0$

$B = \sin\varphi$

$\alpha = 1$

$\beta = 2\cos\varphi$

Folglich:

$$\sin n\varphi = B\beta^{n-1} - \frac{(n-2)}{1}B\beta^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}B\beta^{n-5}$$

$$- \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}B\beta^{n-7} + \ldots$$

$$= \sin\varphi(2^{n-1}\cos\varphi^{n-1} - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos\varphi^{n-3}$$

$$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}\cos\varphi^{n-7} + \ldots)$$

Für die Gleichung:

$\cos n\varphi = 2\cos\varphi\cos(n-1)\varphi - \cos(n-2)\varphi$ iſt

$A = \cos 0\varphi = 1$

$B = \cos\varphi$

$$\alpha = 1$$

$\beta = 2\cos\varphi$ Alſo

$$\cos n\varphi = B\beta^{n-1} - \beta^{n-2} - \frac{n-2}{1} B\beta^{n-3} + \frac{n-3}{1}\beta^{n-4}$$

$$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2} B\beta^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)}{1\,.\,2}\beta^{n-6} - \ldots$$

$$= 2^{n-1}\cos^{n}\varphi \left.\begin{array}{l} - \frac{n-2}{1} 2^{n-3} \\ - 2^{n-2} \end{array}\right\} \cos^{n-2}\varphi \left.\begin{array}{l} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2} 2^{n-5} \\ + \frac{n-3}{1} 2^{n-4} \end{array}\right\} \cos^{n-4}\varphi - \ldots$$

$$= 2^{n-1}\cos^{n}\varphi - \frac{n}{1} 2^{n-3}\cos^{n-2}\varphi + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2} 2^{n-5}\cos^{n-4}\varphi$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3} 2^{n-7}\cos^{n-6}\varphi + - \ldots$$

In der Gleichung:

$$\sin 2n\varphi = 2\cos 2\varphi \sin 2(n-1)\varphi - \sin 2(n-2)\varphi$$

ſetze man y für $\sin\varphi$; für $2\cos 2\varphi$ den gleichbedeutenden Werth $2-4y^2$, und für n nach und nach $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{3}{2}$, $+\frac{5}{2}$ u. ſ. w. ſo erhält man folgende rücklaufende Reihe:

$$\sin -\varphi = -y$$
$$\sin \varphi = +y$$
$$\sin 3\varphi = 3y - 4y^3$$
$$\sin 5\varphi = 5y - 20y^3 + 16y^5$$
$$\sin 7\varphi = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 64y^7$$
$$\sin 9\varphi = 9y - 120y^3 + 432y^5 - 576y^7 + 256y^9$$

u. ſ. w.

Ihre zurückweiſende Skale iſt $+(2-4y^2)$, -1.

Betrachtet man die ſo verwickelt ſcheinenden Coefficienten ihrer Glieder genauer, ſo erblickt man in ihnen

die figurirten Zahlen, die ſich in folgender Art darſtellen laſſen:

$$\sin -\varphi = -y$$
$$\sin +\varphi = +y$$
$$\sin 3\varphi = 3y - 4.1.y^3$$
$$\sin 5\varphi = 5y - 4(3+2.1)y^3 + 4^2.1.y^5$$
$$\sin 7\varphi = 7y - 4(6+2.4)y^3 + 4^2(5+2.1)y^5 - 4^3.1.y^7$$
$$\sin 9\varphi = 9y - 4(10+2.10)y^3 + 4^2(15+2.6)y^5 - 4^3(7+2.1)y^7 + 4^4.1.y^9$$
$$\sin 11\varphi = 11y - 4(15+2.20)y^3 + 4^2(35+2.21)y^5 - 4^3(28+2.8)y^7 + 4^4(9+2.1)y^9 - 4^5.1.y^{11}$$

u. ſ. w.

Die allgemeine Form der ſo entwickelten Glieder, in den oben gebrauchten Symbolen ausgedrückt, iſt alſo:

$$\sin n\varphi = {}^{n}\mathfrak{A}y - 4(\overset{n-1}{\overline{{}^2\mathfrak{B}}} + 2.\overset{n-3}{\overline{{}^2\mathfrak{C}}})y^3 + 4^2(\overset{n-3}{\overline{{}^2\mathfrak{D}}} + 2.\overset{n-5}{\overline{{}^2\mathfrak{E}}})y^5$$
$$- 4^3(\overset{n-5}{\overline{{}^2\mathfrak{F}}} + 2.\overset{n-7}{\overline{{}^2\mathfrak{G}}})y^7 + 4^4(\overset{n-7}{\overline{{}^2\mathfrak{H}}} + 2.\overset{n-9}{\overline{{}^2\mathfrak{J}}})y^9$$
$$- 4^5(\overset{n-9}{\overline{{}^2\mathfrak{K}}} + 2.\overset{n-11}{\overline{{}^2\mathfrak{L}}})y^{11} + \ldots$$

Dieſe gilt, wie der Augenſchein lehrt, für jedes der entwickelten Glieder, und da ſie ſich für jedes r^{te} Glied ergiebt aus der Vervielfältigung des $(r-1)^{ſten}$ und $(r-2)^{ten}$ Gliedes durch die Scala relationis, und deren Zuſammenzählung; ſo folgt, daß ſie ſich für jedes nächſt höhere Glied durch dieſelbe Operation mit denſelben allgemeinen Zeichen ergeben muß, wodurch alſo ihre Allgemeinheit für jedes Glied evident wird.

Hiernach iſt alſo, wenn man den Zeichen A, B, u. ſ w. die von ihrer Stellenzahl abhängenden Werthe derſelben ſubſtituirt,

$$\sin n\varphi = ny - 4\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{1.2.2^2} + \frac{(n+1)(n-1)(n-3).2}{1.2.3.2^3}\right\}y^3$$

$$+4^2\left\{\frac{(n+3)..(n-3)}{1...4.2^4} + \frac{(n+3)..(n-5).2}{1....5.2^5}\right\}y^5$$

$$-4^3\left\{\frac{(n+5...(n-5)}{1.....6.2^6} + \frac{(n+5).....(n-7).2}{1......7.2^7}\right\}y^7$$

$$+\frac{4^4}{2^8}\left\{\frac{(n+7)......(n-7)}{1.......8}\right\}\left\{1 + \frac{n-9}{9}\right\}y^9 \ldots$$

oder, wenn man die beiden Theile jedes zweigliedrigen Ausdrucks addirt,

$$\sin n\varphi = ny - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}y^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5.}y^5 -$$

$$-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7.}y^7 + \ldots$$

Die ähnliche Gleichung für cos. n φ wird auf eine ähnliche Art durch Darſtellung der allgemeinen Form der figurirten Zahlen gefunden.

18.	A.	a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.	B
			b'.	c'.	d'.	e'.	f'.	g'	h'.	
				c''.	d''.	e''.	f''.	g''.	h''.	
					d'''.	e'''.	f'''.	g'''.	h'''.	
						e^{IV}.	f^{IV}.	g^{IV}.	h^{IV}.	
							f^{V}.	g^{V}.	h^{V}.	
								g^{VI}.	h^{VI}.	
									h^{VII}.	C

In dieſem aus Elementen zuſammengeſetzten recht- winklichen Dreiecke A B C, betrachte man jedes Glied in jeder mit AB parallelen Reihe als die Summe zweier nächſten Glieder der darüber ſtehenden parallelen Reihe. Es ſei alſo

$$b' = a + b$$
$$c' = b + c$$
$$c'' = b' + c' = a + 2b + c$$
$$d'' = c' + d' = b + 2c + d$$
$$c'' + d'' = d''' = 2 + 3b + 3c + d$$

und immer ſo fort nach dem nämlichen Geſetz; ſo iſt die Reihe der Elemente, welche die Hypotenuſe A C bilden, eine arithmetiſche Reihe höherer Ordnung (2) und jede ihr parallele, eine Differenzreihe von ihr, jede um Eins niedriger als die andere; a iſt das Anfangs- glied der Hauptreihe, b, c, d, u. ſ. w. ſind die An- fangsglieder der erſten, zweiten, dritten und folgenden Differenzreihe. Man bezeichne die Stellenzahl von a mit o, das heißt, man fange die Glieder der Hauptreihe mit b' zu zählen an, ſo ergeben ſich für dieſelben nach obigem folgende Gleichungen:

$$0.\ a = a$$
$$1.\ b' = 1.\ a + 1.\ b$$
$$2.\ c'' = 1.\ a + 2.\ b + 1.\ c$$
$$3.\ d''' = 1.\ a + 3.\ b + 3.\ c + 1.\ d$$

Man ſieht ſogleich, die numeriſchen Coefficienten von b, c, d, in dieſen Gliedern ſind figurirte Zahlen, deren Ordnungszahlen von der Linken zur Rechten um Eins

zunehmen, deren Stellenzahlen aber eben ſo um Eins abnehmen.

Man ſetze alſo irgend ein Glied der Hauptreihe an der r^{ten} Stelle

$$= a + \overset{r}{\mathfrak{A}} b + \overset{r-1}{\mathfrak{B}} c + \overset{r-2}{\mathfrak{C}} d + \overset{r-3}{\mathfrak{D}} e + \overset{r-4}{\mathfrak{E}} f + \ldots$$

Das an dieſem Gliede nächſt anliegende rechter Hand in der mit A B parallelen Linie wird aus b, c, d, u. ſ. w. eben ſo gebildet, als das erwähnte Glied der Hauptreihe an der r^{ten} Stelle. Folglich iſt jenes

$$= b + \overset{r}{\mathfrak{A}} c + \overset{r-1}{\mathfrak{B}} d + \overset{r-2}{\mathfrak{C}} e + \overset{r-3}{\mathfrak{D}} f + \overset{r-4}{\mathfrak{E}} g + \ldots$$

Die Summe von beiden giebt das Glied der Hauptreihe an der $(r+1)^{ſten}$ Stelle. Sie iſt.

$$= a + (\overset{r}{\mathfrak{A}} + 1) b + (\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + \overset{r}{\mathfrak{A}}) c + (\overset{r-2}{\mathfrak{C}} + \overset{r-1}{\mathfrak{B}}) d + (\overset{r-3}{\mathfrak{D}} + \overset{r-2}{\mathfrak{C}}) e + (\overset{r-4}{\mathfrak{E}} + \overset{r-3}{\mathfrak{D}}) f + \ldots$$

Dies iſt, wie bereits oben (17 und 14) bemerkt iſt.

$$= a + \overset{r+1}{\mathfrak{A}} b + \overset{r}{\mathfrak{B}} c + \overset{r-1}{\mathfrak{C}} d + \overset{r-2}{\mathfrak{D}} e + \overset{r-3}{\mathfrak{E}} f + \ldots$$

Dieſe Form, die für die erſten Glieder durch den Augenſchein erwieſen wird, gilt alſo für jedes folgende um Eins weiter nach C hin liegende Glied der Hauptreihe a, b', c'' u. ſ. w. Jedes wird alſo durch die Anfangsglieder der Hauptreihe und der Differenzreihen und durch die nach dem angegebnen Geſetz fortſchreitenden figurirten Zahlen-Coefficienten gegeben.

Iſt nun das Glied der Hauptreihe an der n^{ten} Stelle $= N$, ſo iſt, wenn man für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die gleichbedeutenden Werthe ſubſtituirt,

$$N = a + \frac{n}{1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}c + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2\cdots\cdots(r-1)r}r + \ldots$$

Da, für $r=n+1$, $n-r+1=0$ iſt, ſo beſteht die Reihe, welche das Glied an der n^{ten} Stelle ausdrückt, aus nicht mehr als $n+1$ Gliedern. So viel ſind aber auch nöthig, um N und jedes folgende Glied der Hauptreihe zu beſtimmen. Iſt $r = n$, ſo iſt $n-r+1 = 1$. Folglich iſt der Coefficient des letzten Gliedes $=1$, und die damit verbundene Differenz die letzte unveränderliche.

19. Man ſetze in der erſten Horizontalreihe AB des Dreiecks ABC, ſtatt der Elemente a, b, c — dieſe a^5, a^4b, a^3b^2 — und in der folgenden deren Summen jeder Ordnung in nachfolgender Art

A. a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5. B
$(a+b)a^4$, $(a+b)a^3b$, $(a+b)a^2b^2$, $(a+b)ab^3$, $(a+b)b^4$
$(a+b)^2a^3$, $(a+b)^2a^2b$, $(a+b)^2ab^2$, $(a+b)^2b^3$
$(a+b)^3a^2$, $(a+b)^3ab$, $(a+b)^3b^2$
$(a+b)^4a$, $(a+b)^4b$
$(a+b)^5$.
C.

ſo iſt die Summe $(a+b)^5$ das 5te Glied der Hauptreihe, vom zweiten gezählt, mithin, nach vorigem

$$(a+b)^5 = \frac{a^5}{1} + \frac{5}{1}a^4b + \frac{5.4}{1.2}a^3b^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}a^2b^3$$
$$+ \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}ab^4 + \frac{5.4.3.4.1}{1.2.3.4.5}b^5.$$

Man ſieht leicht, wie jede Form $(a+b)^n$ ſich eben ſo,

als eine Summe, aus dem erſten Gliede a^n, und den Anfangsgliedern der Differenzreihen $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$ u. ſ. w. darſtellen, und das bekannte Geſetz des Binomiums aus dem Geſetze arithmetiſcher Reihen finden laſſe.

20. Nimmt man in dem Dreiecke ABC (18) die erſte Horizontalreihe a, b, c, d für die Hauptreihe, und die darunter ſtehenden parallelen für die Differenzreihen, das heißt, ſetzt man

$$b' = b - a$$
$$c' = c - b$$
$$c'' = c' - b' = c - 2b + a$$
$$d'' = d' - c' = d - 2c + b$$
$$d''' = d'' - c'' = d - 3c + 3b - a:$$

ſo folgt auf dieſelbe Art wie vorhin die Gleichung für das Anfangsglied der n^{ten} Differenzreihe

$$N = \pm a \mp \frac{n}{1} b \pm \frac{n(n-1)}{1.\,2} c \mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.} d \pm \ldots$$

und die oberen Vorzeichen gelten, wenn n eine gerade, die unteren, wenn es eine ungerade Zahl iſt. Mittelſt dieſer Form finden ſich die Glieder jeder Differenzreihe aus denen der Hauptreihe, ſo wie, nach der oben (8) dargeſtellten, die Glieder der Hauptreihe aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen.

21. Man kann die Reihe a, b′, c″, d‴, die nun wieder für die Hauptreihe gelten ſoll, als eine ſtetige Linie betrachten. Theilt man die Zwiſchenräume zweier nächſten gegebenen Glieder in n gleiche Theile, und ver-

langt das Glied der $\frac{u}{n}$ten Stelle, fängt alſo von $\frac{1}{n}$ zu zählen an, ſo fordert man, daß dieſes Glied für ſeine Stelle nach demſelben Geſetze gebildet werden ſoll, als die gegebnen für ihre Stellen. Die Entfernung zweier nächſten gegebenen Glieder der Hauptreihe iſt dann das Maaß, welches als Einheit betrachtet, und wodurch jedes Differenzglied, b, c, d, ... beſtimmt wird.

Soll alſo das Glied der $\frac{u}{n}$ten Stelle nach demſelben Geſetze gebildet ſein, als das der erſten, zweiten und folgenden, ſo kann es offenbar keine andere Form haben, als dieſe:

$$a+\frac{u}{n}b+\frac{\frac{u}{n}\left(\frac{u}{n}-1\right)}{1.\ 2.}c+\frac{\frac{u}{n}\left(\frac{u}{n}-1\right)\left(\frac{u}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3.}d+\ldots$$

Hierdurch iſt alſo der Forderung genügt, und das ſo gebildete Glied iſt ein in die durch die Differenzen b, c, d und durch a beſtimmte Hauptreihe gehöriges.

Je größer man die Zahl n ſetzt und je mehr Glieder man für die Stellenzahlen von der Form $\frac{u}{n}$ beſtimmt, deſto mehr nähert ſich die Reihe der Idee einer ununterbrochenen Linie.

22. Verlängert man ſie auch auf die andere Seite über o hinaus, ſo werden die Stellenzahlen der auf dieſe Seite fallenden Glieder ſubtractiv, und das Glied der —nten Stelle iſt =

$$a-\frac{n}{1}b+\frac{n(n+1)}{1.\ 2.}c-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}d+-$$

wel-

welche Form ſich aus der obigen (18) unmittelbar ergiebt, wenn man darin —n ſtatt +n ſetzt.

Hiedurch erhält alſo auch das Geſetz des Binomiums (19) ſeine Ausdehnung auf beide Fälle für negative und gebrochne Exponenten.

23. Exempel.

Die Viereckzahlen in ihrer natürlichen Ordnung ſind, für die darüber angegebnen Stellen, folgende:

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
81.	100.	121.	144.	169.	196.	225.	256.

Man nehme aber den Abſtand dreier Glieder dieſer Reihe zum Maaß der Einheit, ſo ergeben ſich folgende Reihen:

Stellenzahl:	0.	1.	2.	3.	4.	5.
Hauptreihe:	1.	16.	49.	100.	169.	256.
1. Differenzr.		15.	33.	51.	69.	87.
2. — — —			18.	18.	18.	18.

Sucht man nun das $\frac{13}{3}$te Glied dieſer Hauptreihe, ſo ergiebt es ſich, nach der allgemeinen Form,

$$1+\frac{13}{3}15+\frac{\frac{13}{3}(\frac{13}{3}-1)}{1.\ 2}18=1+13.\,5+13.\,10.=196.$$

Dies iſt aber das 13te Glied der obigen Reihe, deren Maaß der Einheit ein Drittel iſt des Maaßes der letzteren.

24. Wie durch die angegebnen Formen aus den Differenzen einer arithmetiſchen Reihe jedes ihrer Glieder, auf jeder $\frac{u}{n}$ten Stelle, auch ihre Summe, gefunden

werden kann, iſt nach dem Geſagten leicht begreiflich. Ihr wichtigſter Nutzen aber zeigt ſich bei Darſtellung des nach ſeinem Erfinder genannten Tayloriſchen Theorems. Dies enthält nämlich nichts anders, als die vollendete Annäherung einer arithmetiſchen Reihe an die ihr zum Grunde liegende Idee einer ununterbrochnen Linie. Die Darſtellung dieſes ſchönen Theorems möge denn die Betrachtung der figurirten Zahlen und der daraus entſpringenden arithmetiſchen Formen beſchließen.

25. Die oben (21) gegebene Form zur Beſtimmung eines Gliedes der Hauptreihe an der $\frac{u}{n}$ten Stelle iſt gleichbedeutend mit dieſer:

$$a+u\frac{b}{n}+\frac{u(u-n)}{1.\ 2.}\frac{c}{n^2}+\frac{u(u-n)(u-2n)}{1.\ 2.\ 3.}\frac{d}{n^3}+\ldots$$

Man nenne die Quotienten $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n^2}$, $\frac{d}{n^3}$, u. ſ. w.: Differenzverhältniſſe; n iſt die Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile der Zwiſchenraum zweier Hauptglieder der Reihe, z. B. a, b′ eingetheilt worden iſt; $\frac{1}{n}$ iſt der Zwiſchenraum je zweier nächſten Glieder, die zwiſchen die Hauptglieder a, b′, c″ u. ſ. w. fallen, und von welchen das der uten Stelle geſucht wird.

Man ſieht aus der aufgeſtellten Form, wie dieſe Glieder beſtimmt werden, durch die Differenzverhältniſſe $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n^2}$, $\frac{d}{n^3}$ u. ſ. w., die hier die Stelle der Differenzen ſelbſt vertreten.

Fängt man nun von irgend einer Stelle der Hauptreihe, welche Stelle man mit x bezeichne, zu zählen an, und ſeßt man das dazu gehörige Glied derſelben, y, welches alſo das Anfangsglied der neu zu zählenden Hauptreihe wird; denkt man ſich die Zahl, welche die Menge der gleichen Theile beſtimmt, in die der Zwiſchenraum von einem Hauptgliede bis zu dem ihm nächſten getheilt worden, als eine Funktion der Zahl x, um welche die leßtere vermehrt oder vermindert wird, und bezeichnet man daher dieſen Zwiſchenraum mit Δx; bezeichnet man die Differenzen der um Δx von einander entfernten Glieder nach ihrer Ordnung mit Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ — ſtatt b, c, d u. ſ. w. und ſeßt man u irgend einem Vielfachen von Δx gleich, $u = n\Delta x$, ſo erhält jene Form dieſe Geſtalt:

$$y + \frac{n\Delta x}{1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{n\Delta x(n\Delta x - \Delta x)}{1.\ 2.} \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

$$+ \frac{n\Delta x(n\Delta x - \Delta x)(n\Delta x - 2\Delta x)}{1.\ 2.\ 3.} \cdot \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots$$

Die Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ ſind offenbar abhängig von der Größe des Zwiſchenraums zweier Hauptglieder Δx (von der Größe nämlich, die er abſolut hat, ohne Rückſicht auf die Menge der Theile, in die er zerlegt iſt); wachſen mit ihm und nehmen mit ihm ab. Je kleiner alſo Δx geſeßt wird, deſto mehr nähern ſich die Differenzverhältniſſe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ — einer gewiſſen Grenze, die ſelbſt nur aus der Art der Abhängigkeit des erſten Gliedes y von der Stellenzahl x ausgemittelt

werden kann. Dieſe für jetzt als unbekannt anzunehmenden Grenzen bezeichne man mit $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ —, welche alſo mit deſto größerer Genauigkeit die Stelle der zu ihnen gehörigen Differenzverhältniſſe vertreten werden, je kleiner man Δx ſetzt, je mehr es ſich dem o nähert.

Setzt man nun $n\Delta x$ einer beſtimmten Zahl gleich, $n\Delta x = b$, ſo giebt obige Form das Glied der Hauptreihe für die Stelle $x+n\Delta x$, das iſt, für $x+b$ an. Man kann aber nun Δx kleiner ſetzen als jede gegebene Größe, wenn man nur n in demſelben Maaße wieder vergrößert, ſo daß ihr Produkt unveränderlich bleibt. Wäre nun z. B. $n\Delta x = b = 3$ und $\Delta x = 0{,}0000001$, ſo würde ſchon Δx ohne merklichen Fehler gegen b verſchwinden. Man kann ſich aber Δx noch unendlich kleiner im Verhältniſſe gegen b vorſtellen. Es hindert nichts dieſe Vorſtellung immer weiter zu treiben. Folglich kommt die obige Form immer näher dieſer:

$$y + \frac{n\Delta x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{n^2\Delta x^2}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{n^3\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

in dem Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, u. ſ. w. als völlig verſchwindend gegen b oder $n\Delta x$ gedacht werden. Da es nun keine Größe giebt, über die hinaus Δx nicht noch kleiner gedacht werden könnte, ſo iſt die letzte Form die einzig beſtändige und wahre für das Glied der Reihe, welches auf y folgt, und zur Stelle $x+b$ gehört. Dies alſo iſt, $n\Delta x = b$ geſetzt,

$$= y + b\frac{dy}{dx} + b^2 \cdot \frac{d^2y}{1.2.dx^2} + b^3 \cdot \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} + b^4 \cdot \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4}.$$

26. Exempel.

Die Art, auf welche das Glied y der Hauptreihe von der Zahl ſeiner Stelle x abhängig iſt, werde durch dieſe Gleichung gegeben:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

Δx ſei das Maaß des Zwiſchenraums von einem Gliede der Hauptreihe zum andern, und die auf y zunächſt folgenden bezeichne man nach der Reihe mit y', y'', y''' u. ſ. w., ſo gehört y' zur Stelle $x + \Delta x$, y'' zur Stelle $x + 2\Delta x$, y''' zur Stelle $x + 3\Delta x$, y^N zur Stelle $x + n\Delta x$.

Man erhält alſo y', y'', $y''' - y^N$, wenn man in die Gleichung für y ſtatt x ſetzt $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $\ldots x + n\Delta x$. Es iſt alſo

$$\begin{array}{llllll}
y & = A + & Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & \\
y' & = A + & Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & \\
 & & + B\Delta x + & 2Cx\Delta x & + 3Dx^2\Delta x & \\
 & & & + C\Delta x^2 & + 3Dx\Delta x^2 & \\
 & & & & + D\Delta x^3 & \\
y'' & = A + & Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & \\
 & & + 2B\Delta x + & 4Cx\Delta x & + 6Dx^2\Delta x & \\
 & & & + 4C\Delta x^2 & + 12Dx\Delta x^2 & \\
 & & & & + 8D\Delta x^3 & \\
y''' & = A + & Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & \\
 & & + 3B\Delta x + & 6Cx\Delta x & + 9Dx^2\Delta x & \\
 & & & + 9C\Delta x^2 & + 27Dx\Delta x^2 & \\
 & & & & + 27D\Delta x^3 &
\end{array}$$

. . . .

$$\begin{aligned} y^N = A + Bx &+ Cx^2 + Dx^3 \\ &+ nB\Delta x + 2nCx\Delta x + 3nDx^2\Delta x \\ &+ n^2C\Delta x^2 + 3n^2Dx\Delta x^2 \\ &+ n^3D\Delta x^3 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben ſich die Differenzen für das Maaß Δx, und zwar:

$$\Delta y = y' - y = (B+2Cx+3Dx^2)\Delta x + (C+3Dx)\Delta x^2 + D\Delta x^3$$

$$\Delta y' = y'' - y' = (B+2Cx+3Dx^2)\Delta x + (3C+9Dx)\Delta x^2 + 7D\Delta x^3$$

$$\Delta y'' = y''' - y'' = (B+2Cx+3Dx^2)\Delta x + (5C+15Dx)\Delta x^2 + 19D\Delta x^3$$

und aus dieſen:

$$\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y = (2C+6Dx)\Delta x^2 + 6D\Delta x^3$$

$$\Delta^2 y' = \Delta y'' - \Delta y' = (2C+6Dx)\Delta x^2 + 12D\Delta x^3$$

daraus aber:

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y' - \Delta^2 y = 6D\Delta x^3.$$

Da nun $\Delta^3 y$ nicht mehr abhängig iſt von x, ſo kann es auch durch die weitere Vermehrung oder Verminderung von x nicht mehr verändert werden. Mithin giebt es für die folgenden Stellenzahlen $x+4\Delta x$, $x+5\Delta x$ u. ſ. w. kein $\Delta^3 y'$, $\Delta^3 y''$, folglich kein $\Delta^4 y$, $\Delta^5 y$ u. ſ. w., ſondern dieſe ſind ſämmtlich $= 0$.

Aus obigen Gleichungen folgen dieſe Differenz-Verhältniſſe:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = B+2Cx+3Dx^2+(C+3Dx)\Delta x+D\Delta x^2$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = 2C + 6Dx + 6D\Delta x$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = 6D.$$

Dies letzte iſt unveränderlich. Die Grenzen, denen die übrigen ſich nähern, je kleiner Δx geſetzt wird, ſind:

für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, .. $B + 2Cx + 3Dx^2 = \frac{dy}{dx}$

für $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, .. $2C + 6Dx = \frac{d^2 y}{dx^2}$

Nach dem oben dargeſtellten Taylorſchen Theorem iſt

$$4^N = y + b\frac{dy}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{b^4}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots$$

Setzt man in dieſer Gleichung für b, $n\Delta x$, und für y und für die Grenzverhältniſſe deren Werthe, ſo erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} y^N = {} & A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \\ & + n\Delta x(B + 2Cx + 3Dx^2) \\ & + \frac{n^2\Delta x^2}{1.2}(2C + 6Dx) \\ & + \frac{n^3\Delta x^3}{1.2.3}6D, \end{aligned}$$

welche mit der vorhin gegebenen gleichbedeutend iſt.

613499
SBN
Biblioteca Nazionale Napoli

Berlin, gedruckt bei Louis Quien.
Kronen-Straße No. 48.

Google